Extra uppgifter om Svängningar.

S1. Det tar 12,0 s för en enkel harmonisk oscillator att fullborda fem kompletta svängningar. Bestäm dess period, frekvens och vinkelhastighet.

S2. En kropp vars massa är 1,00 kg är förbunden med en horisontell fjäder. Fjädern sträcks ursprungligen 0,100 m och släpps från detta läge. Nästa gång hastigheten hos kroppen är noll inträffar 0,500 s senare. Hur stor är kroppens maximala hastighet?

S3. Ett block med okänd massa är förbunden med en fjäder vars fjäderkonstant är 6,50 N/m och utför en harmonisk svängning vars amplitud är 10,0 cm. När blocket befinner sig halvvägs mellan jämviktläget och ändläget har det en fart som uppmäts till 30,0 cm/s. Bestäm blockets massa, svängningens period och den maximala accelerationen hos blocket.

S4. En partikel utför en enkel harmonisk rörelse vars amplitud är 3,00 cm. I vilket läge är dess fart hälften så stor som dess maximala?

S5. En person går in i ett högt torn vars höjd han vill bestämma. Han noterar att en pendel som sträcker sig från tornets topp till dess botten har en svängningstid som är 12,0 s. Hur högt är tornet? Antag att tornet hade stått på månen där tyngaccelerationen är 1,67 m/s², hur lång hade då svängningstiden varit?

S6. En fysikalisk pendel har formen av en jämntjock kropp och utför en harmonisk svängningsrörelse vars frekvens är 0,450 Hz. Pendeln har en massa som är 2,20 kg och leden är placerad 0,350 m från dess masscentrum. Bestäm kroppens tröghetsmoment med avseende på den aktuella leden.

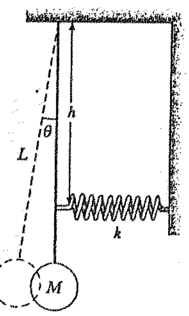
S7. I en viss dämpad oscillator utgörs av en kropp och en fjäder. Dämpningskraften proportionell mot kroppens hastighet (proportionalitetskonstanten är b). Visa att den mekaniska energin för en dämpad oscillator ges av $dE/dt = -bv^2$.

S8. Ett stort block P utför en horisontell enkel harmonisk rörelse längs en friktionsfri yta med frekvens f = 1,50 Hz. Blocket B ligger ovanpå P och den statiska friktionskoefficienten mellan de båda är 0,600. Hur stor kan amplituden hos svängningen vara om vi kräver att B inte ska glida?

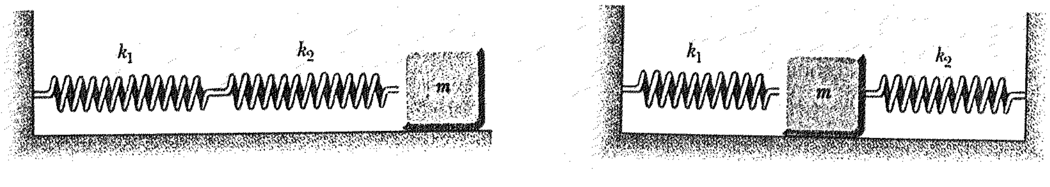
S9. En partikel som hänger i en fjäder oscillerar med en vinkelfrekvens 2,00 rad/s. Systemet fjäder-partikel är upphängt i taket på en hisskorg och hänger stilla (relativt hisskorgen) när denna sänker sig med hastigheten 1,50 m/s. Hisskorgen stannar plötsligt. Med hur stor amplitud kommer partikeln att oscillera. Ställ upp rörelseekvationen för partikeln (välj uppåt som positiv riktning)

S10. En lätt kubisk behållare med volymen a^3 är ursprungligen fylld med en vätska vars densitet är b. Behållaren hålls urspungligen uppe av ett lätt snöre så att den bildar en pendel vars längd är L_1, mätt från den fyllda behållarens masscentrum. Vätskan rinner ut genom behållarens botten med en konstant fart dM/dt. Vid en godtycklig tid t är vätskenivån h och längden av pendeln L (mätt från masscentrums läge vid tiden t). Bestäm svängningstidens (periodens) tidsberoende.

S11. En vertikal matematisk pendel vars längd är L och massa M har en fjäder vars fjäderkonstant är k förbunden till sig på avståndet h från upphängningspunkten. Bestäm svängningsfrekvensen för systemet (pendel + fjäder) för små värden på amplituden. Antag att tråden som massan M hänger i är helt stel.



S12. Ett block vars massa är m är förbunden med två masslösa fjädrar med fjäderkonstanterna k_1 och k_2. Bestäm perioden för de båda fallen som illustreras i figuren.



S1.

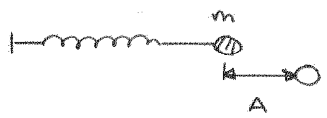
Givet: $5T = 12{,}0\ s$.

$$\Rightarrow T = \frac{12}{5}\ s = \underline{2{,}4\ s.}$$

frekvens $f = \frac{1}{T} = \frac{5}{12}\ s^{-1} = \frac{5}{12}\ Hz = \underline{0{,}42\ Hz}$

$\omega = 2\pi f = 2{,}62\ rad/s = \underline{2{,}62\ s^{-1}}$

S2



$x(t) = A\cdot\cos\omega t$ $\quad x_{max}$ då $t=0$

Givet: $m = 1{,}00\ kg$

$A = 0{,}100\ m$

$v=0$ då $t = 0{,}500\ s$. $\Rightarrow T = 2\cdot 0{,}500\ s$

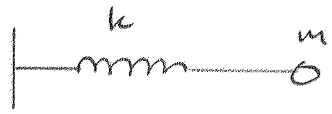
Sökt: v_{max}

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -A\cdot\omega\cdot\sin\omega t \Rightarrow v_{max} = A\omega$$

$$\omega = 2\pi\frac{1}{T} = \frac{2\pi}{2\cdot 0{,}500} = 6{,}28\ rad/s = 6{,}28\ s^{-1}$$

$$\Rightarrow v_{max} = 0{,}100\cdot 6{,}28 = \underline{0{,}63\ m/s.}$$

S3



Givet: $k = 6{,}50\ N/m$

$A = 0{,}100\ m$

$v(x=A/2) = 0{,}300\ m/s = v_1$

$x(t) = A\cdot\sin\omega t$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v(t) = A\cdot\omega\cdot\cos\omega t$$

$x(t) = A\cdot\sin\omega t = A/2$ då $\sin\omega t = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega t = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$v_1 = v(x=A/2) = A\cdot\omega\cdot\cos\frac{\pi}{6} \Rightarrow \omega = \frac{v_1}{A\cdot\cos\pi/6} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow m = \frac{A^2\cdot\cos^2\pi/6\cdot k}{v_1^2} =$

$$= \frac{0{,}100^2\cdot\cos^2\pi/6\cdot 6{,}50}{0{,}300^2}\ kg = \underline{0{,}54\ kg}$$

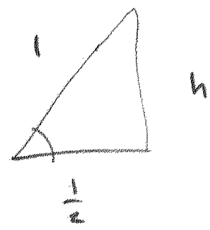
$\Rightarrow \omega = 3{,}46\ s^{-1} \Rightarrow \underline{T = \frac{2\pi}{\omega} = 1{,}81\ s}$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2\cdot\sin\omega t \Rightarrow a_{max} = A\omega^2 = 0{,}100\cdot 3{,}46^2\ m/s^2 = \underline{1{,}20\ m/s^2}$$

$A = 3{,}00\ \text{cm}$

54

$x = A \cdot \sin \omega t$



$\dot{x} = \omega A \cdot \cos \omega t$

$h^2 + \frac{1}{4} = 1$

$\dot{x}_{max} = \omega A$

$h^2 = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}$

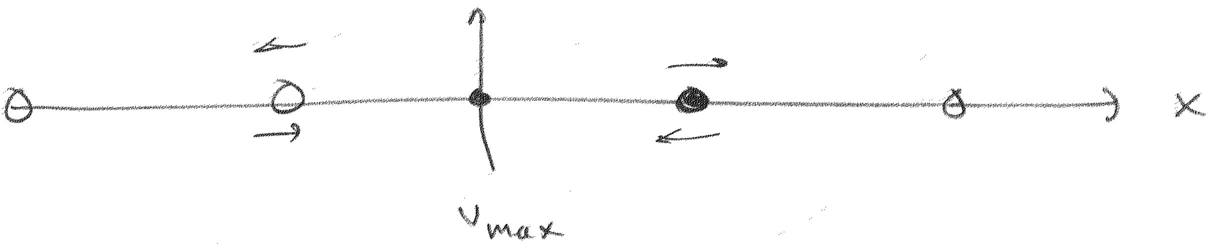
$\dot{x} = \dot{x}_{max}/2$ om $\cos \omega t = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \omega t = \pi/3 = 60^\circ$ el. $\omega t = -\frac{\pi}{3}$

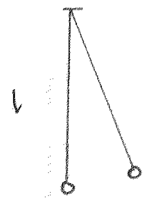
$\Rightarrow x = A \cdot \sin \frac{\pi}{3} = A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{cm} = 2{,}6\ \text{cm}$

$x = A \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -A \frac{\sqrt{3}}{2} = -2{,}60\ \text{cm}$

$= 2{,}60\ \text{cm}$



S5



Givet: $T = 12,0\,s$.

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow l = \frac{T^2 \cdot g}{(2\pi)^2} = \underline{\underline{35,8\,m}}$$

på månen $g = 1,67\,m/s^2$

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{l}} \qquad \frac{2\pi}{T_{mån}} = \frac{\sqrt{g_{mån}}}{\sqrt{l}}$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi/T}{2\pi/T_{mån}} = \frac{T_{mån}}{T} = \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_{mån}}} = \sqrt{\frac{9,81}{1,67}}$$

$$\Rightarrow T_{mån} = T \cdot \sqrt{\frac{9,81}{1,67}} = \underline{\underline{29,1\,s}}$$

S6

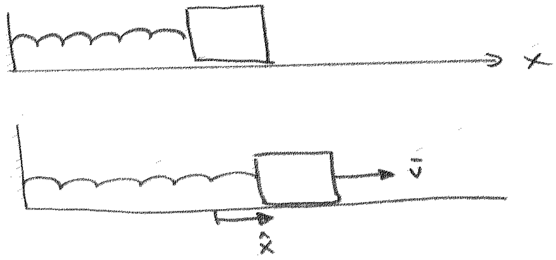
Fysikalisk pendel: $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}}$

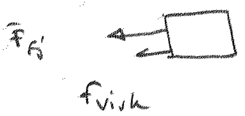
givet: $f = 0,450\,Hz = \frac{1}{T}$
$m = 2,20\,kg$
$d = 0,350\,m$

$$I = mgd\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = mgd\left(\frac{\frac{1}{f}}{2\pi}\right)^2 =$$

$$= 2,20 \cdot 9,81 \cdot 0,350 \left(\frac{1}{0,450 \cdot 2\pi}\right)^2 = \underline{\underline{0,946\,kgm^2}}$$

(57) Dämpade svängningar:



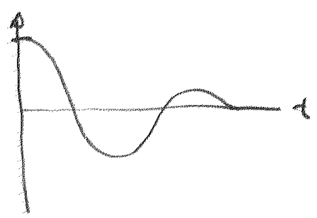


$$F_x = -kx - bv_x = ma_x = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow \quad x = A\cdot e^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

$Ae^{-\frac{b}{2m}t}$ avklingande amplitud



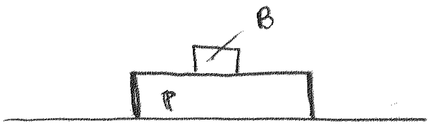
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}m\frac{d(v^2)}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m\,2v\cdot\frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}k\cdot 2x\,\frac{dx}{dt} =$$

$$= m\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} + kx\cdot\frac{dx}{dt} = \left[m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt}\right]$$

$$= \left(-kx - b\frac{dx}{dt}\right)\cdot\frac{dx}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = -b\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \underline{\underline{-bv^2}}$$

(58)



$F = 2\pi\omega$

$\omega = \frac{f \cdot 2\pi}{\cancel{2\pi}}$

B: $x(t) = A \cdot \sin \omega t$

$v(t) = -\omega A \cdot \cos \omega t$

$a(t) = -\omega^2 A \cdot \sin \omega t$

$a_{max} = \omega^2 A_{\cancel{max}}$

$f_{max} = \mu_s \cdot N = \mu_s m_B \cdot g = m\omega^2 \cdot A$

$m \cdot a_{max} = m\omega^2 A$

$\Rightarrow A = \frac{\mu_s m_B \cdot g}{\cancel{m_B}\omega^2} = \frac{\mu_s g}{\omega^2} =$

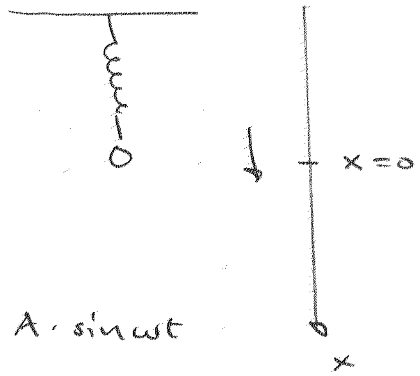
$= \frac{\mu_s \cdot g \cdot \cancel{4\pi^2}}{4\pi^2 f^2} = \frac{0{,}600 \cdot 9{,}81 \cdot \cancel{4\pi^2}}{4\pi^2 \, 1{,}5^2} =$

$= \underline{0{,}066 \text{ m}}$

59

hissens hastighet

$v = 1{,}50 \text{ m/s}$.



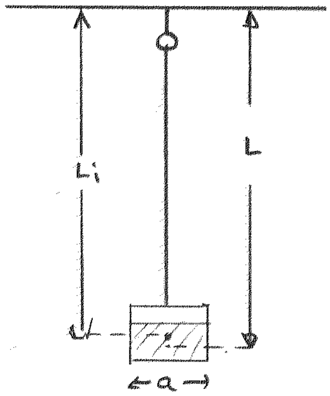
t=0 : hissen stanser

$$x(t) = A \cdot \sin\omega t$$

$$v(t) = \omega A \cdot \cos\omega t$$

$$v_{max} = \omega A = v \Rightarrow A = \frac{v}{\omega} = \frac{1{,}50}{2{,}00} \text{ m} = \underline{\underline{0{,}75 \text{ m}}}$$

S10



$$\frac{dM}{dt} = \text{konstant}$$

kub.

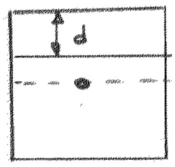
densitet $= \rho$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{dT}{dt} = 2\pi \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{1}{2} L^{-1/2} \cdot \frac{dL}{dt} = \frac{\pi}{\sqrt{gL}} \frac{dL}{dt}$$

Tag fram ett uttryck för L som funktion av t !

En sänkning av vätskenivån med d ⇒ en sänkning av cm med d/2



cm med fylld behållare

Under tiden t rinner massan $\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot t = \Delta M$

Denna massa upptar en volym $\Delta V = a^2 \cdot d$

$$\rho = \frac{\Delta M}{\Delta V} \Rightarrow \Delta V = \frac{\Delta M}{\rho} \Rightarrow d = \frac{\Delta M}{\rho a^2} \Rightarrow \frac{d}{2} = \frac{\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot t}{2a^2\rho}$$

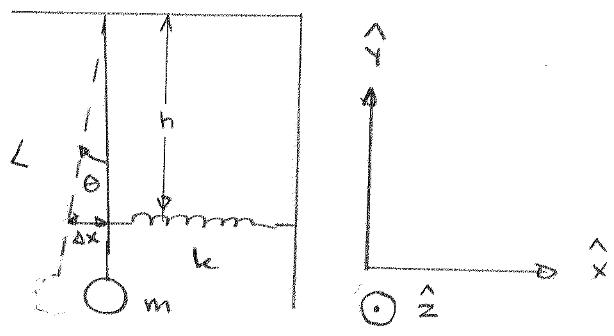
$$\Rightarrow L = L_i + \frac{\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot t}{2a^2\rho}$$

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{\frac{dM}{dt}}{2a^2\rho} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \frac{\pi \frac{dM}{dt}}{\sqrt{g}\left(\sqrt{L_i + \frac{\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot t}{2\rho a^2}}\right) 2a^2\rho}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L_i + \frac{\left(\frac{dM}{dt}\right) \cdot t}{2a^2\rho}}{g}}$$

S11

Bestäm ω!



θ räknas positivt medurs $\Rightarrow \bar{\alpha} \parallel -\hat{z}$

$$I = ML^2$$

$$\bar{\tau} = I\bar{\alpha} = I\frac{d^2\theta}{dt^2}(-\hat{z})$$

Teckna momentet som funktion av θ så är vi hemma i vår basekvation som nu ser ut så här

$$\ddot{\theta} + A\cdot\theta = 0$$

Små vinklar θ:

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{A}$$

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}_k + \bar{\tau}_g \qquad (\bar{\tau} = \bar{r}\times\bar{F})$$

$\bar{\tau}_k$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_k &= \Delta x\cdot k\cdot\hat{x} = h\cdot\sin\theta\cdot k\,\hat{x} \\ \bar{r} &= -h\cdot\cos\theta\,\hat{y} - h\cdot\sin\theta\cdot\hat{x} \approx -h\hat{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \bar{\tau}_k =$$

$$= \Delta x\, kh\,(-\hat{y})\times(\hat{x}) =$$
$$= \Delta x\, kh\,\hat{z} =$$
$$= kh^2\sin\theta\,\hat{z} \approx kh^2\theta\,\hat{z}$$

$\bar{\tau}_g$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{F}_g &= Mg(-\hat{y}) \\ \bar{r} &= -L\cdot\cos\theta\,\hat{y} - L\cdot\sin\theta\,\hat{x} \end{aligned}\right\}$$

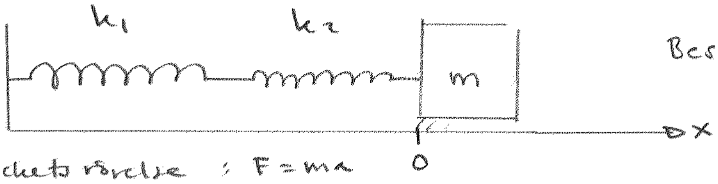
$$\Rightarrow \bar{\tau}_g = -L\sin\theta\, Mg\;\hat{x}\times(-\hat{y}) = L\cdot\sin\theta\cdot Mg\,\hat{z} \approx$$
$$\approx L\cdot Mg\cdot\theta\,\hat{z}$$

$$\Rightarrow \bar{\tau} = (kh^2\theta + LMg\theta)\hat{z} = ML^2\frac{d^2\theta}{dt^2}(-\hat{z})$$

$$\therefore \ddot{\theta} + \frac{kh^2 + LMg}{ML^2}\theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{kh^2}{M} + gL}$$

512 a)

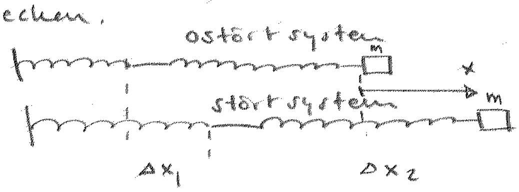


Bestäm ω ! $\left[\text{el } T = \frac{2\pi}{\omega}\right]$

Studera blockets rörelse : $F = ma$

Basekvation : $\ddot{x} + Ax = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{A}$

kraften $\bar{F}$ uppstår när fjäder nr. 2 störs. $\bar{F}$ kan vara riktad åt vä som åt hö beroende på vad störningen Δx_2 av fjäder 2 har för tecken.



$$F = -k_2 \cdot \Delta x_2$$

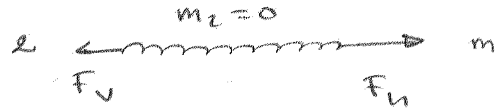
$$F = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}\cdot\Delta x_2 = 0 \qquad (1)$$

Vi vill relatera Δx_2 till x.

Fjädrarna är masslösa :



$$\Rightarrow |F_h| = |F_v|$$

$$|F_h| = k_2 \cdot \Delta x_2 \qquad |F_v| = k_1 \cdot \Delta x_1$$

$$\Rightarrow \Delta x_1 \cdot k_1 = \Delta x_2 \cdot k_2 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{k_2}{k_1}\cdot\Delta x_2$$

men $x = x_1 + \Delta x_2 = \frac{k_2}{k_1}\Delta x_2 + \Delta x_2 = \Delta x_2 \frac{k_1+k_2}{k_1}$

$$\Rightarrow \Delta x_2 = x\frac{k_1}{k_1+k_2}$$

Sätt in i (1)

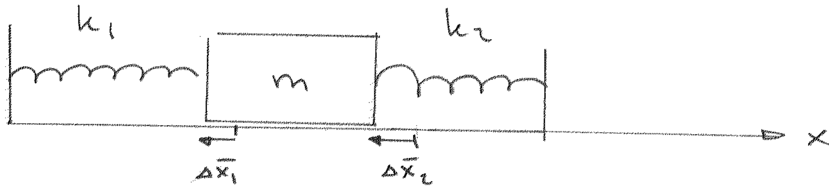
$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_2}{m}\frac{k_1}{k_1+k_2}x = 0$$

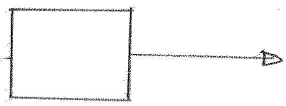
$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k_1 \cdot k_2}{m(k_1+k_2)}}$$

$$f = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1 \cdot k_2}}$$

S12

b)





$$\vec{F} = -k_1 \vec{\Delta x_1} - k_2 \vec{\Delta x_2}$$

$$\Rightarrow \quad -(k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2) = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = x$$

$$\Rightarrow \quad -x(k_1 + k_2) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k_1+k_2}{m} x = 0$$

$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}} \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$$