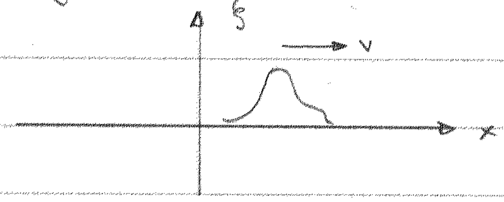
Förläsning 5 & 6

Vågors fysik.

I vågrörelseläran behandlas fenomen som är gemensamma för olika typer av vågrörelser; mekaniska och el. magnetiska. ljudvågor, ljus, vattenvågor, osv. elektroner

Både rum och tid är variabler $\xi(x,t)$, $\xi(\bar{r},t)$

Beskrivning av vågrörelse. endimensionell utbredning (x och t variabler)



Att vi använder ξ och inte y beror på att vi har i åtanke att vågorna ofta är tredimensionella.

$$\xi = f(x)$$

för att argumentet skall vara detsamma krävs att x ökar

$x \sim x - x_0 \Rightarrow \xi = f(x - x_0)$ ∴ samma värde på ξ infaller för x ökat med x_0

med $x_0 = v \cdot t$ får vi en fortskridande kurva i positiv x-led v = fashastigheten

Allmänt: $\xi = f(x \pm vt)$

Ofta är vågrörelsen sådan att f är en harmonisk funktion så att

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - vt)$$

$\Rightarrow x \sim x + \frac{2\pi}{k}$ ξ ändras ej

$$\xi\left(x + \frac{2\pi}{k}, t\right) = \xi_0 \sin k\left(x + \frac{2\pi}{k} - vt\right) =$$

$$= \xi_0 \sin\left[k(x - vt) + 2\pi\right] = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi(x,t)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$ = <u>våglängden</u> = perioden i rummet

k = <u>vågtalet</u> $= \frac{2\pi}{\lambda}$

$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda}(x - vt)$$

men

$$\xi_0 \sin k(x - vt) = \xi_0 \sin\left(kx - \frac{2\pi v}{\lambda} t\right) =$$

$$= \xi_0 \sin(kx - \omega t)$$

där

$$\omega = kv = 2\pi \frac{v}{\lambda} = 2\pi \cdot \nu$$ = <u>vinkelfrekvensen</u>

ν = <u>frekvensen</u>

<u>perioden i tiden</u> $P = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu}$

Nu kan vi skriva:

$$\xi = \xi_0 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{P}\right)$$

$- \sim + \quad \xrightarrow{v} x \quad \sim \quad \xleftarrow{v} \longrightarrow x$

<u>Vågekvationen.</u> $\xi = f(x - vt) = f(u)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dx} &= \frac{df}{du}\frac{du}{dx} = \frac{df}{du}\cdot 1 \Rightarrow \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{d^2f}{du^2} \\ \frac{d\xi}{dt} &= \frac{df}{du}\frac{du}{dt} = \frac{df}{du}(-v) \Rightarrow \frac{d^2\xi}{dt^2} = v^2\frac{d^2f}{du^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

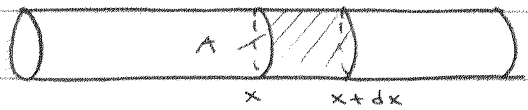
$$\Rightarrow \boxed{\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}} \quad \text{vågekvationen}$$

allmänt

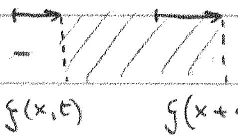
$$\xi(x,t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt)$$

Tillämpning av vågekvationen

<u>Longitudinell våg i en stav.</u> bestäm v !



ostört



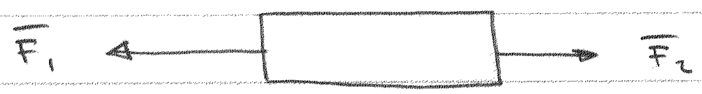
med störning ξ

$$\xi(x+dx,t) = \xi(x,t) + \frac{d\xi}{dx}\cdot dx$$

$$\text{töjning} = \frac{\text{längdändring}}{\text{urspr. längd}} = \frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx} = \frac{d\xi}{dx} = \epsilon$$

Hooks lag: spänningen $\sigma = \frac{F}{A} = E\cdot\epsilon = E\frac{d\xi}{dx}$

$$\Rightarrow F = A\cdot E\frac{\partial\xi}{\partial x}$$



$$F_1 = F(x,t) = AE\frac{d\xi}{dx}$$

$$F_2 = F(x+dx,t) = F(x,t) + \frac{dF}{dx}\cdot dx =$$
$$= F(x,t) + AE\frac{d^2\xi}{dx^2}\cdot dx$$

$$\Rightarrow \boxed{F_2 - F_1 = AE\frac{\partial^2\xi}{dx^2}\cdot dx}$$

Skilln. i kraft orsakar en acceleration enligt

$$F_2 - F_1 = ma = m\cdot\frac{d^2\xi}{dt^2} = \rho\cdot(A\cdot dx)\frac{d^2\xi}{dt^2} =$$

$$= \rho A\cdot dx\frac{d^2\xi}{dt^2} = AE\frac{d^2\xi}{dx^2}\cdot dx$$

$$\therefore \frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{\rho}{E}\frac{d^2\xi}{dt^2}$$

jfr. vågekvationen: $\frac{d^2\xi}{dx^2} = \frac{1}{v^2}\frac{d^2\xi}{dt^2}$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

---

annat exempel: tryckvåg i en gas.

$v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ där $K = \rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right)$ = kompressionsmodulen

Utbredningshastighet i en gas som funktion av p och T.

Snabba ändringar: adiabatisk process god approximation

$pV^{\gamma} = \text{konst} \Rightarrow p = \text{konst}\left(\frac{1}{V}\right)^{\gamma}$

täthetem $\rho \sim \frac{1}{V}$ $\therefore$ $p = C \cdot \rho^{\gamma}$

$\Rightarrow \frac{dp}{d\rho} = \gamma \cdot C \cdot \rho^{\gamma-1}$

men : $K = \rho\left(\frac{dp}{d\rho}\right) = \gamma C \rho^{\gamma} = \gamma p$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ högre tryck ger större v !

T:

$$\left.\begin{array}{l} pV = n'RT \\ \rho = \frac{m}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{p}{\rho} = \frac{n'RT}{m} = \frac{RT}{\frac{m}{n'}} = \frac{RT}{M_{mol}}$$

$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M_{mol}}} = \alpha \sqrt{T}$

vid $0°C$, $273K$ gäller $v_{luft} = 331{,}45$ m/s

$\Rightarrow v(T) = 20{,}055\sqrt{T}$ m/s.

Transversell våg på en sträng.

m → F   m = massa per längdenhet

spännkraft : F

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \quad \left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \cdot \frac{m}{kg} = \frac{m^2}{s^2} \right]$$

Transversell våg i en stav. $v = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

G = skjuvmodulen.

Polarisation : transversell : linjärpolarisation

cirkulär —"—

opolariserad

Ytvågor i en vätska :

vätskans ytspänning

$$v = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi T}{\rho \lambda}}$$

v beror av λ !

oberoende av vätsketyp!

Stora våglängder : $v \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ gravitationsvågor

små våglängder

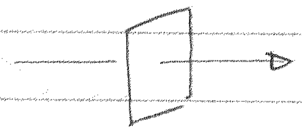
$v \approx \sqrt{\frac{2\pi T}{\rho \lambda}}$ kapillärvågor.

v(λ) : dispersion. vågor med olika våglängd har olika utbredningshastighet

Intensitet.

I en vågrörelse fortplantar sig energi och rörelsemängd.

Intensiteten = effekten som passerar per ytenhet av en yta ⊥ mot utbredningsriktningen (W/m^2)



Vågrörelsen innehåller energitätheten w (J/m^3)
Utbredningshastighet: v

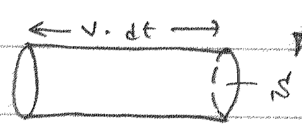
$$\Rightarrow I = v \cdot w$$

Om $\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow w = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \xi_0^2$$

$$\Rightarrow I \sim \xi_0^2$$

$$\boxed{\text{Intensiteten är prop. mot (amplitud)}^2}$$

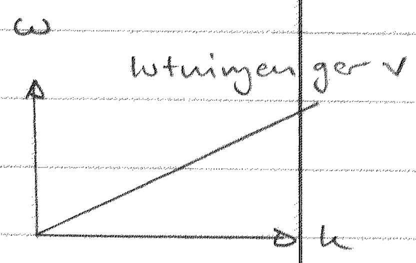


$$dE = w \cdot (v \cdot dt) \cdot S$$

$$I = \frac{dE}{dt} \frac{1}{S} = w \cdot v$$

Vi har härlett $I \sim \xi_0^2$ för ett speciellt fall men drar oss nu inte för att tillämpa det på alla typer av vågor.

<u>Grupphastighet</u>

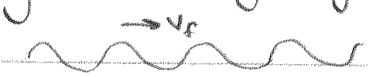


utan dispersion : $v = \omega / k =$

= konstant

egentligen fashastighet : v_f =

= utbredningshastigheten för en bestämd harmonisk våg en våglängd.



En verklig vågrörelse är alltid sammansatt av flera harmoniska vågor - olika ω

Enklaste fallet : ω och ω' $\omega' - \omega$ liten

samma amplitud ξ_0

$$\xi = \xi_0 \sin(kx - \omega t) + \xi_0 \sin(k'x - \omega' t) =$$

$$= 2\xi_0 \cos \frac{1}{2}\left[(k'-k)x - (\omega'-\omega)t\right] \cdot$$

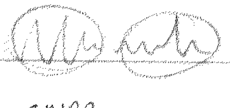
$$\cdot \sin \frac{1}{2}\left[(k'+k)x - (\omega'+\omega)t\right]$$

$$\left.\begin{array}{l} \omega' \text{ och } \omega \text{ nästan lika} \\ k' \text{ och } k \quad \text{—"—} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}(k'+k) \approx k \quad \frac{1}{2}(\omega'+\omega) \approx \omega$$

$$\Rightarrow \xi = 2\xi_0 \cos \frac{1}{2}\left[(k'-k)\cdot x - (\omega'-\omega)\cdot t\right] \cdot \sin(kx - \omega t)$$

↗

amplitudmodulering



grupphastighet $\left.\begin{array}{l} v_g = \dfrac{\omega' - \omega}{k' - k} = \dfrac{d\omega}{dk} \\ \omega = kv \end{array}\right\} \Rightarrow v_g = v + k\dfrac{dv}{dk}$

D21 En plan sinusformad transversell vågrörelse med frekvens 6.0 Hz och fashastigheten 12 m s^{-1} har amplituden a. Vågfunktionen har värdet $0.50^{1/2}$ a vid tiden t = 0 i en viss punkt.
Beräkna vågfunktionens värde vid t = 0.15 s i en punkt 0.75 m från den förra, räknat i vågens utbrednings riktning.

<u>Givet:</u> $f = 6{,}0$ Hz $\xi = a \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$

$v = 12$ m/s

$\xi(x_1, 0) = \sqrt{0{,}5}$

<u>Sökt:</u> $\xi(x_1 + 0{,}75,\ 0{,}15)$

<u>Lösning:</u> sätt $x_1 = 0$

1) Bestäm fasvinkeln φ under detta villkor!

$$\xi(x,t) = a \cdot \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\xi(0,0) = \frac{1}{\sqrt{2}} a \Rightarrow a \cdot \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} a$$

$$\Rightarrow \varphi = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \varphi = 45^\circ \text{ el } 135^\circ \text{ dvs } \frac{\pi}{4} \text{ el } \frac{3\pi}{4}$$

2) $$\xi(0{,}75,\ 0{,}15) = a \cdot \sin\left(\omega \cdot 0{,}15 - k \cdot 0{,}75 + \begin{matrix} \pi/4 \\ 3\pi/4 \end{matrix}\right)$$

bestäm ω och k: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 6{,}0$

$$\left.\begin{matrix} k = \frac{2\pi}{\lambda} \\ v = f \cdot \lambda \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{f}{v} \end{matrix}\right\} \Rightarrow k = 2\pi \frac{6{,}0}{12}$$

$$\therefore \xi(0{,}75,\ 0{,}15) = a \cdot \sin\left[2\pi \cdot 6{,}0 \cdot 0{,}15 - \pi \cdot 0{,}75 + \begin{matrix} \pi/4 \\ 3\pi/4 \end{matrix}\right] =$$

$$= \begin{matrix} -0{,}81\ a & (\pi/4) \\ -0{,}59\ a & (3\pi/4) \end{matrix}$$

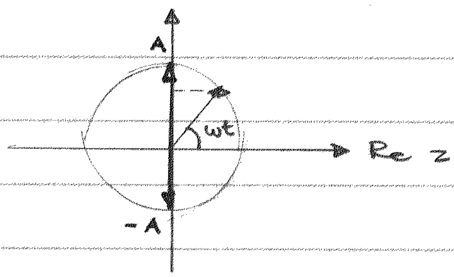
D1 En partikel utför en enkel harmonisk svängningsrörelse med amplituden A. Om fasvinkeln är noll jämviktsläget, hur stor är fasvinkeln då den kinetiska energin är dubbelt så stor som den potentiella?

Harmonisk svängn. rörelse

$\xi = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ Im z $\qquad z = A \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$

Fasvinkeln = 0

då $\xi = 0 \rightarrow \varphi = 0$



$$E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cdot \cos^2 \omega t$$

$$E_{tot} = E_{kin,max} = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

$$E_{tot} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{kin} = 2 E_{pot} \Rightarrow E_{kin} = \frac{2}{3} E_{tot}$$

$$\Rightarrow \cos^2 \omega t = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\omega t = \pm 35{,}26^\circ \quad \pm 144{,}74^\circ}$$

D22 **a)Visa att $\zeta(x,t) = A\cos(\omega t - \alpha)\sin kx$ satisfierar den endimensionella vågekvationen.**

Vågekvationen : $\dfrac{d^2\xi}{dx^2} = \dfrac{1}{v^2}\dfrac{d^2\xi}{dt^2}$

För att en rörelse ska få kallas en våg krävs det att den "håller sin form" och att den rör sig med konstant hastighet

$$\xi(x,t) = A\cdot\cos 2\pi(ft-\alpha)\cdot\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

$$\frac{d\xi}{dx} = A\cdot\cos 2\pi(ft-\alpha)\,\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\cos\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\cdot A\cdot\cos 2\pi(ft-\alpha)\cdot\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2\xi(x,t)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = -A\cdot 2\pi f\cdot\sin(ft-\alpha)\,\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -A(2\pi f)^2\cdot\cos(ft-\alpha)\cdot\sin\frac{2\pi}{\lambda}\cdot x = -(2\pi f)^2\xi(x,t)$$

men $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{f}{v}$ ∴ vågekv. uppfylld

b)Vad beskriver $\zeta(x,t)$ för slags vågrörelse och vad är vågens fashastighet och grupphastighet?

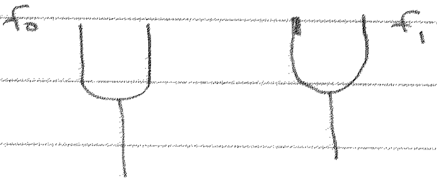
$v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ $\quad f = \dfrac{v_f}{\lambda} \Rightarrow 2\pi f = \dfrac{2\pi}{\lambda}\cdot v_f$

$\Rightarrow \omega = k\cdot v_f = \text{konst}$

$\Rightarrow \dfrac{d\omega}{dk} = 0$

stående våg.

D40 Ljudet från en stämgaffel med okänd frekvens ger tillsammans med ljudet från en standardstämgaffel med frekvensen 44.0 Hz upphov till svävningar i intensiteten på 3.0 Hz. Svävningsfrekvensen minskar när man sätter ett stycke vax på den första gaffeln. Bestäm denna frekvens.



Givet: $f = 440$ Hz

$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ökad massa ger minskad frekvens.

svävningsfrekvensen $= |f_0 - f_1| \Rightarrow f_1 = 443$ el 437 Hz

med vax minskar svävningsfrekvensen

$\therefore f_1 = 443$ Hz.

D23 **Fashastigheten för vågor i ett bestämt material ges av $v_f = C_1 + C_2\lambda$,**
där C_1 och C_2 är konstanter och λ våglängden.
Bestäm grupphastigheten.

Lösning:

$$v_f = C_1 + C_2 \cdot \lambda \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow v_f = C_1 + C_2 \dfrac{2\pi}{k} \\ \\ v_f = \dfrac{\omega}{k} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\omega}{k} = C_1 + C_2 \frac{2\pi}{k}$$

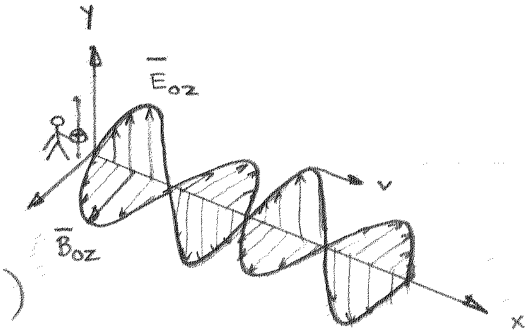
$$\Rightarrow \omega = C_1 \cdot k + 2\pi C_2$$

$$\Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = C_1 \quad \therefore \quad v_g = C_1 .$$

<u>Electromagnetiska vågor</u> : ljus, röntgenvågor, radiovågor mm.

En fullständig bakgrund till electromagnetiska vågor ger i E3-kursen Electromagnetiska fält och här går vi bara en snabb introduktion till en del begrepp.

Förflyttning av laddning upp och ner genererar ett kopplat electromagnetiskt fält



$$\bar{E}_y(x,t) = \bar{E}_{oy} \sin \omega\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

$$\bar{B}_z(x,t) = \bar{B}_{oz} \sin \omega t\left(\frac{x}{v} - t\right)$$

Maxwells ekvationer ger

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t} \Rightarrow E_{oy} = v \cdot B_{oz} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu \cdot \epsilon \dfrac{\partial E_y}{\partial t} = -(\mu_r \mu_0)(\epsilon_r \epsilon_0) \dfrac{\partial E_y}{\partial t} & (2) \end{cases}$$

μ och ϵ är permeabiliteten respektive dielektricitets-konstanten för det medium vari vågen utbreder sig.

μ anger koppling mellan ström och magnetfält.
För en oändligt lång ledare som genomflyts av en likström I gäller

$$B = \frac{\mu_0 \mu_r}{4\pi} \frac{2I}{d}$$

Stort värde på μ_r ger stärkt B.

$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am
μ_r = relativa permeabiliteten

ϵ anger kopplingen mellan laddning och elektriskt fält enligt

$$E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{Q}{r}$$

$\epsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ As/Vm
ϵ_r = relativa dielektricitets-konstanten

stort värde på ϵ_r ger utskärmat fält från Q.

Derivera $\bar{B}_z(x,t)$ med avseende på x och $\bar{E}_y(x,t)$ med avseende på t. Sätt in i (2), utnyttja sambandet $E_{0y} = v B_{0z}$

$$\frac{\omega}{v} B_{0z} = \omega (\mu_r \mu_0)(\epsilon_r \epsilon_0) E_{0y} = \omega (\mu_r \mu_0)(\epsilon_r \epsilon_0) v B_{0z}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{1}{(\mu_0 \mu_r)(\epsilon_0 \epsilon_r)}$$

För icke magnetiska material gäller $\mu_r \approx 1$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} \cdot c$$

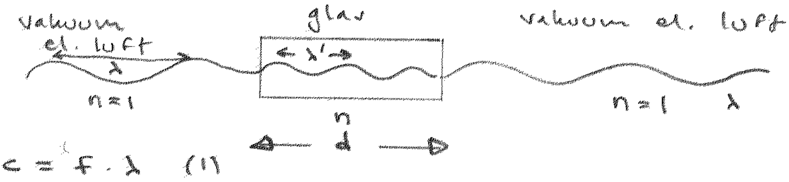
ljushastigheten i vakuum $= 3 \cdot 10^8$ m/s.

Brytningsindex $n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r}$. n för ett visst medium anger kvoten mellan ljushastigheten i vakuum och ljushastigheten i det aktuella mediet.

Ex. Viss typ av glas har $n = 1{,}5$.
Ljushastigheten i sådant glas $= \frac{3 \cdot 10^8}{1{,}5}$ m/s $= 2 \cdot 10^8$ m/s.

Närmare undersökningar ger att brytningsindex är våglängdsberoende. Detta utnyttjas t.ex. i prismor för uppdelning av vitt ljus i olika färger. (Mer om detta i samband med brytningslagen)
Att olika våglängder utbreder sig med olika utbredningshastighet kan ställa till problem i ex. optiska fibrer.

Optisk väg:



I vakuum: $c = f \cdot \lambda$ (1)
I glas: $v = f' \cdot \lambda'$ (2)

i gränsskiktet vakuum/glas måste vågorna ha samma frekvens $\therefore f' = f$

Vi får nu $v = \frac{c}{n} = f \cdot \lambda'$

$$\Rightarrow c = f \cdot \lambda' \cdot n = f \cdot \lambda \quad \therefore \lambda' = \frac{\lambda}{n}$$

kortare våglängd i glaset än i vakuum

Ofta är man intresserad av att beräkna hur många våglängder (av λ') sträckan d motsvarar.

$$\frac{d}{\lambda'} = \frac{d}{\frac{\lambda}{n}} = \frac{n \cdot d}{\lambda}$$

Vi får antalet våglängder i glaset antingen genom att dividera den verkliga tjockleken d med λ' eller att dividera $d \cdot n$ med vakuumvåglängden λ.
Beräkning av fasskift vid passage av d: $\Delta\varphi = 2\pi \frac{n \cdot d}{\lambda} = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)(n \cdot d) =$

$$= k \cdot d_{optisk}$$

Spektra: Elektromagnetiska vågor har våglängdsberoende namn

i) radiovågor $10^3\,m > \lambda > 0,3\,m$

ii) mikrovågor $0,3\,m > \lambda > 10^{-3}\,m$ radar

iii) infrarött ljus $10^{-3}\,m > \lambda > 7,8 \cdot 10^{-7}\,m$ molekylära överg.

iv) ljus $7800\,\text{Å} > \lambda > 3800\,\text{Å}$ el. överg. i atomer

ögat har maximal känsl. vid $5600\,\text{Å}$ grönt.

monokromatiskt ljus = enfärgat ljus, "en" våglängd.

v) ultraviolett stråln. $3,8 \cdot 10^{-7}\,m > \lambda > 6 \cdot 10^{-10}\,m$

vi) röntgenstrålning $10^{-9}\,m > \lambda > 6 \cdot 10^{-12}\,m$ atom, bromsstr.

vii) γ-strålning. överlappar röntgenspektrat

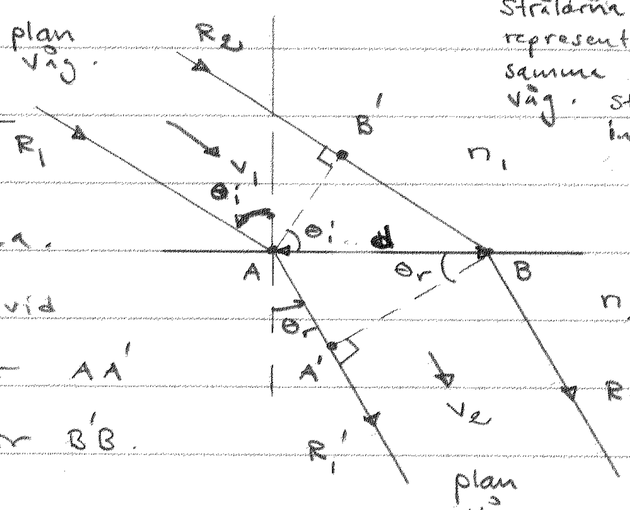
orsakas av kärnprocesser.

Reflexion, brytning och polarisation.

Tänk på! Strålarna R_1 och R_2 är representanter för samma plana infallande våg. Sträckan d finns inte i verkligheten.

Brytningslagen (Snells lag):

Reflexionslagen.



Fasen vid A och B' är lika.

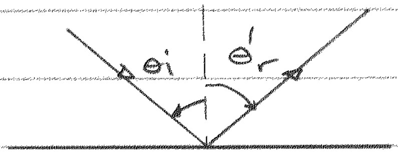
Om fasen ska vara lika vid A' och B måste tiden för AA' vara lika med tiden för B'B.

$$t_{AA'} = \frac{d \cdot \sin\theta_r}{v_2} = \frac{d \cdot \sin\theta_r}{\frac{c}{n_2}} \qquad t_{B'B} = \frac{d \cdot \sin\theta_i}{v_1} = \frac{d \cdot \sin\theta_i}{\frac{c}{n_1}}$$

$$t_{AA'} = t_{BB'} \Rightarrow n_2 \cdot \sin\theta_r = n_1 \cdot \sin\theta_i$$

$$\text{eller} \quad \frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = \frac{n_2}{n_1} \equiv n_{21}$$

Pss härleds reflexionslagen.

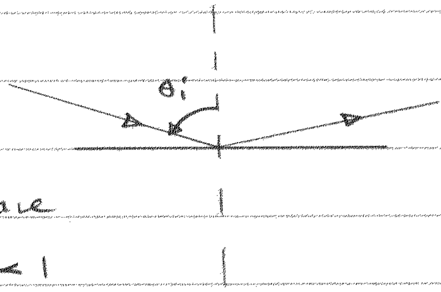


Den infallande, reflekterade och brutna strålen ligger i samma plan: Infallsplanet som ges av någon av dessa strålar samt normalen till ytan.

$n_{21} > 1 \Rightarrow \sin\theta_2 < \sin\theta_1$ ∴ bryt. mot normalen

$n_{21} < 1 \Rightarrow \sin\theta_2 > \sin\theta_1$ ∴ från.

Totalreflexion:



refl. mot tunnare medium $n_{21} < 1$

ex. $n_i = 1,5$

$n_r = 1,0$

$\Rightarrow \theta_{i,max} = 42^\circ$

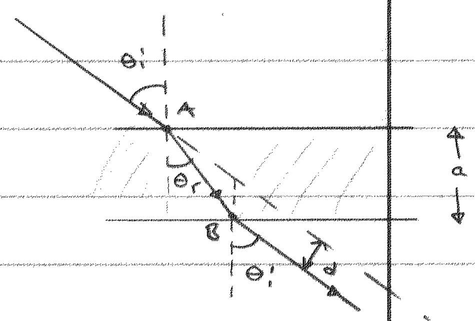
$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_r} = n_{21} < 1$$

Öka θ_i tills $\sin\theta_i = n_{21} \Rightarrow \sin\theta_r = 1 \Rightarrow \theta_r = 90^\circ$

$\Rightarrow$ den brutna strålen ligger i ytan.

Viktigt vid vågutbredning i optiska fibrer.

Förskjutning av stråle i planparallell platta



$$\left.\begin{aligned} a &= AB \cdot \cos\theta_r \\ d &= AB \cdot \sin(\theta_i - \theta_r) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d = a\,\frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\cos\theta_r}$$

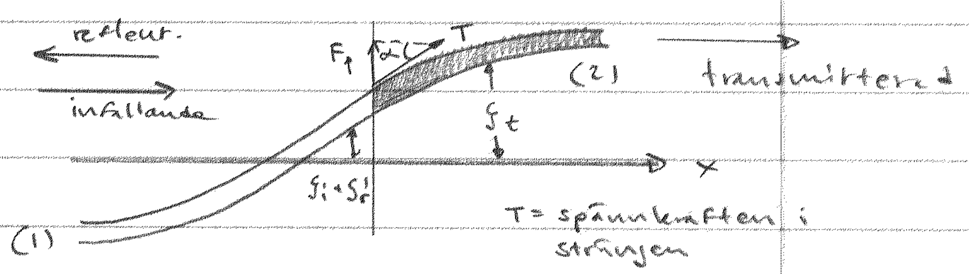
Rep. $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon_r}} = \frac{c}{n}$ opr. väg $= x \cdot n$

$n_1 \cdot \sin\theta_i = n_2 \cdot \sin\theta_r$, inf vinkel = refl. vinkel $\theta_i = \theta_i'$

totalrefl.

Föreläsning 8

Reflexion och transmission av transv. våg på en sträng



Förenklad modell: Två strängar (1) och (2) ihopkopplade i origo.

infallande våg: $\xi_i = A_i \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_1}\right)$

transmitterad våg: $\xi_t = A_t \cdot \sin\omega\left(t - \frac{x}{v_2}\right)$

reflekterad våg: $\xi_r = A_r \cdot \sin\omega\left(t + \frac{x}{v_1}\right)$

I origo $x=0$ gäller: $\xi_i + \xi_r = \xi_t$

$$\Rightarrow A_i + A_r = A_t \quad (1)$$

$F_\uparrow = T \cdot \sin\alpha$ små vinklar $\Rightarrow \sin\alpha \approx \tan\alpha = \frac{d\xi}{dx}$

$$\therefore F_\uparrow = T \cdot \frac{d\xi}{dx}$$

$$\Rightarrow T \frac{d\xi_i}{dx} + T \cdot \frac{d\xi_r}{dx} = T \frac{d\xi_t}{dx} \quad \text{vid } x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_1}(A_i - A_r) = \frac{1}{v_2} A_t \quad (2)$$

(1) och (2) ger $A_t = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} A_i$

$$A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} A_i$$

men

$$v = \sqrt{\frac{T}{m}} \qquad m = \text{massa per längdenhet}$$

$$\Rightarrow \quad A_t = \frac{2\sqrt{m_1}}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}} A_i = T \cdot A_i$$

samt

$$A_r = \frac{\sqrt{m_1}-\sqrt{m_2}}{\sqrt{m_1}+\sqrt{m_2}} A_i = R \cdot A_i$$

transm. T alltid > 0 $\Rightarrow$ A_t samma tecken som A_i
den transmitterande vågen är i fas med den infallande.

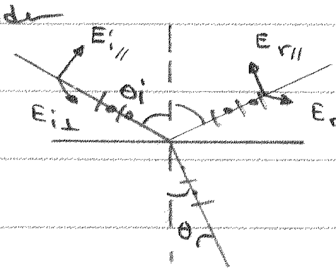
om $m_2 > m_1$ är R negativ

$\Rightarrow$ den refl. vågen är fasförskjuten 180° i förh. till den infallande

Generaliseras till alla vågrörelser (även ljus!)

E = amplituder

Fresnels ekv. (utan bevis)

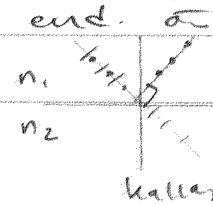


Ljuset kan beskrivas som två "delvågor" en med $\bar{E}$ parallell med inf. planet ($\bar{E}_\parallel$) och en med $\bar{E}$ vinkelrät mot inf. planet ($\bar{E}_\perp$). De båda polarisationstillstånden reflekteras i olika grad.

$$\frac{E_{r\perp}}{E_{i\perp}} = -\frac{\sin(\theta_i-\theta_r)}{\sin(\theta_i+\theta_r)}$$

$$\frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = \frac{\tan(\theta_i-\theta_r)}{\tan(\theta_i+\theta_r)}$$

om $\theta_i + \theta_r = 90^\circ$ är $\frac{E_{r\parallel}}{E_{i\parallel}} = 0$ vilket innebär att den refl. strålen endast är polariserad $\perp$ mot inf. planet



Den inf. vinkel θ_i som tillsammans med n_1 och n_2-värdena gör att $\theta_i + \theta_r = 90^\circ$ kallas pol. vinkeln el. Brewstervinkeln

Hur mycket refl. vid vinkelrätt infall ? $\theta_i = \theta_r = 90^\circ$

$$\left.\begin{array}{l} n_1 \cdot \sin\theta_i = n_2 \cdot \sin\theta_r \\ \qquad n_1 \cdot \theta_i = n_2 \theta_r \\ \theta_i \text{ och } \theta_r \to 0 \;\Rightarrow\; \sin\theta \text{ och } \tan\theta \to \theta \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\sin(\theta_i - \theta_r)}{\sin(\theta_i + \theta_r)} \to \frac{\theta_i - \theta_r}{\theta_i + \theta_r} = \frac{1 - \frac{\theta_r}{\theta_i}}{1 + \frac{\theta_r}{\theta_i}} = \frac{1 - \frac{n_1}{n_2}}{1 + \frac{n_1}{n_2}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

$$I_r = \frac{I_0}{2}\left(\frac{\sin^2(\theta_i - \theta_r)}{\sin^2(\theta_i + \theta_r)} + \frac{\tan^2(\theta_i - \theta_r)}{\tan^2(\theta_i + \theta_r)}\right) \to I_0\left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}\right)^2$$

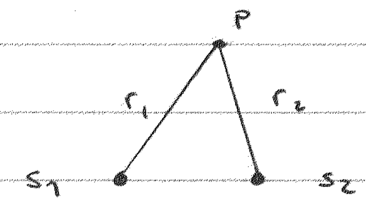
ex luft/glas $\quad n_1 = 1 \quad n_2 = 1{,}5$

$$\frac{I_r}{I_0} = \left(\frac{1{,}5 - 1}{1{,}5 + 1}\right)^2 = \frac{0{,}25}{6{,}25} \approx 0{,}04$$

4% refl om $\theta_i = 0^\circ$

<u>Interferens.</u> två el. flera vågor som överlappar varandra i rum och tid interfererar med varandra.

två synkrona källor: S_1 och S_2



Verkan i P: $\xi_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t - k r_1)$

$$\xi_2 = A_2 \sin(\omega t - k r_2)$$

Om r_1 och r_2 är olika långa kommer A_1 och A_2 att vara olika. Dessutom kommer fasen att vara olika för de två vågorna.

Beräkningarna blir enklare om vi beskriver vågorna som komplexa tal

$$\xi_1(r,t) = A_1 \cdot \sin(\omega t - kr_1) \sim z_1(r,t) = A_1 \cdot e^{j(\omega t - kr_1)}$$

$$\xi_2(r,t) = A_2 \cdot \sin(\omega t - kr_2) \sim z_2(r,t) = A_2 \, e^{j(\omega t - kr_2)}$$

I vår punkt P har r_1 och r_2 <u>bestämda</u> värden varför vi kan skriva

$$z_1(P) = A_1 \, e^{j(\omega t + \delta_1)} \qquad \delta_1 = -kr_1$$

och

$$z_2(P) = A_2 \, e^{j(\omega t + \delta_2)} \qquad \delta_2 = -kr_2$$

Total störning i P:

$$z_{tot}(P) = \underbrace{\left(A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2}\right)}_{\text{komplex total amplitud}} e^{j\omega t} \qquad I \sim (\text{ampl.})^2$$

$$\left(A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2}\right)^2 = \left(A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cdot \cos\delta_2\right)^2 +$$

$$+ \left(A_1 \cdot \sin\delta_1 + A_2 \cdot \sin\delta_2\right)^2 =$$

$$\delta \equiv \delta_1 - \delta_2$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos\delta$$

Specialfall (vanligt):

Sätt $A_1 = A_2 \Rightarrow I_1 = I_2 = I$

1) $\delta = n \cdot 2\pi$ konstr. interferens. $n = 0, 1, 2, \ldots$
(De båda störningarna är i fas.) ↑↑

$$\Rightarrow I_{tot} = I + I + 2\sqrt{I \cdot I} \cdot \cos\delta = 4I$$

2) $\delta = (2n+1)\pi$ destruktiv interferens ↓↑

$$I_{tot} = I + I - 2\sqrt{I \cdot I} = 0.$$

Allm. $I_{tot} = 4I \cdot \cos^2 \frac{\delta}{2}$

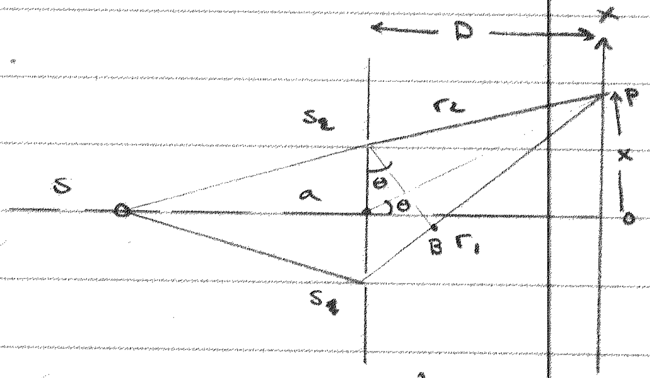
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$
$\Rightarrow \cos\delta = \cos^2\frac{\delta}{2} - \sin^2\frac{\delta}{2}$

Villkor för observerbara stationära interferenseffekter:

S_1 och S_2 måste vara koherenta

dvs ha samma ursprung.

Exempel: Youngs dubbelspalt.



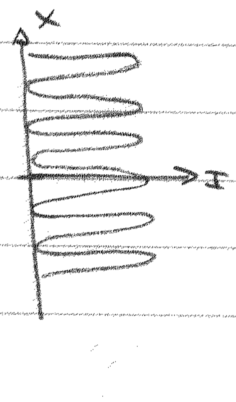
Fasskillnad

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin\theta$$

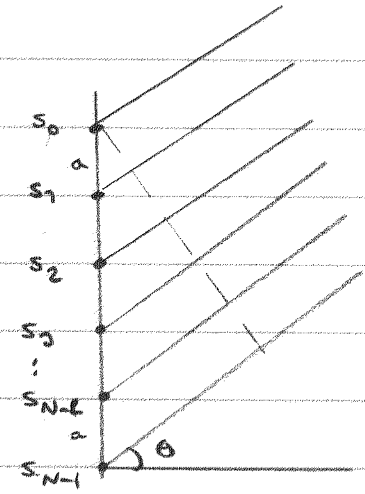
Villkor för maximum $a \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda \Rightarrow \sin\theta = n\frac{\lambda}{a}$

Små vinklar: $\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{x}{D} \Rightarrow x = n\frac{D}{a} \cdot \lambda$

Observerat mönster



Flera synkrona källor. (gitter)



$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin\theta$$

N källor

komplexa störningen vid den streckade linjen

$$z_0 = A \cdot e^{j\omega t}$$

$$z_1 = A \cdot e^{j(\omega t + \delta)}$$

$$z_2 = A \cdot e^{j(\omega t + 2\delta)}$$

$$\vdots$$

$$z_{N-1} = A \cdot e^{j[\omega t + (N-1)\delta]}$$

Matematiken blir förenklad om vi räknar med en komplex störning. Amplituden svarar mot $\operatorname{Im} z_i$

geometrisk serie: kvot $e^{j\delta}$ N termer

$$\left(\frac{1-k^N}{1-k}\right)$$

$$Z_{tot} = A' \cdot e^{j\phi} e^{j\omega t}$$ där $A' e^{j\phi} = A\left(1 + e^{j\delta} + e^{j2\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta}\right)$

$$= A \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}}$$

$$I \sim (\text{ampl.})^2 \Rightarrow I \sim |A e^{j\phi}|^2 =$$

$$= A^2 \frac{(1-e^{jN\delta})(1-e^{-jN\delta})}{(1-e^{j\delta})(1-e^{-j\delta})} = A^2 \frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} =$$

$$= \left[\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\right] =$$

$$= A^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

δ beror bl.a. av riktningen θ!

Extremvärden

1) $a \cdot \sin\theta = 0$ "**rakt fram**" $\theta = 0$

$$\theta \to 0 \Rightarrow \delta \to 0 \qquad \lim_{\delta \to 0} \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = N^2$$

två varianter:

$$I_\theta = I_0' \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

$$I_\theta = I_0 \frac{\sin^2 N \frac{\delta}{2}}{N^2 \cdot \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

I_0' = intensiteten från en källa (rakt fram)

I_0 = int. från hela uppsättningen N källor rakt fram.

2) **Maximum** (N^2) då $\frac{\delta}{2} = 0, \pi, 2\pi$

dvs då $a \cdot \sin\theta = n \cdot \lambda$

både täljare och nämnare är noll!

3) **minima**: variera $\theta \Rightarrow \delta$ varierar

täljaren ($\sin N \frac{\delta}{2}$) varierar N ggr så fort som nämnaren ($\sin \frac{\delta}{2}$). (har nollställen oftare)

Minima då

$$\sin\left(N\frac{\delta}{2}\right) = 0 \Rightarrow N\frac{\delta}{2} = p \cdot \pi \Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{p}{N}\pi$$

men $\frac{p}{N} \neq$ heltal ty då är $\frac{\delta}{2} = n \cdot \pi$ och det var ju villkoret för max. både tälj. och nämn = 0.

$\boxed{p \neq n \cdot N}$

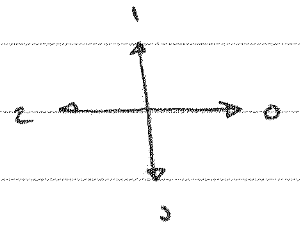
dvs minima när $\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin\theta = \frac{p}{N}\pi$

$$\Rightarrow a \cdot \sin\theta = \frac{p}{N} \cdot \lambda$$

dvs $a \cdot \sin\theta = \frac{1}{N}\lambda, \frac{2}{N}\lambda, \ldots, \frac{N-1}{N}\lambda, -, \frac{N+1}{N}\lambda, \ldots$

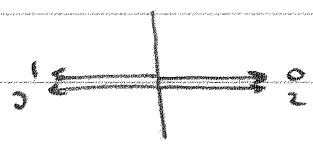
ex. 4 spalter (0,1,2,3) min. villkor $a \cdot \sin\theta = \frac{p}{4}$ $p \neq n \cdot 4$.

i) $a \cdot \sin\theta = \frac{1}{4}\lambda$.



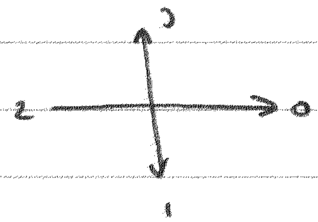
$\Sigma = 0$ min

ii) $a \cdot \sin\theta = \frac{2}{4}\lambda$



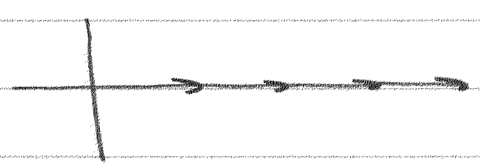
$\Sigma = 0$

iii) $a \cdot \sin\theta = \frac{3}{4}\lambda$



$\Sigma = 0$

iv) $a \cdot \sin\theta = \frac{4}{4}\lambda = \lambda$



max.

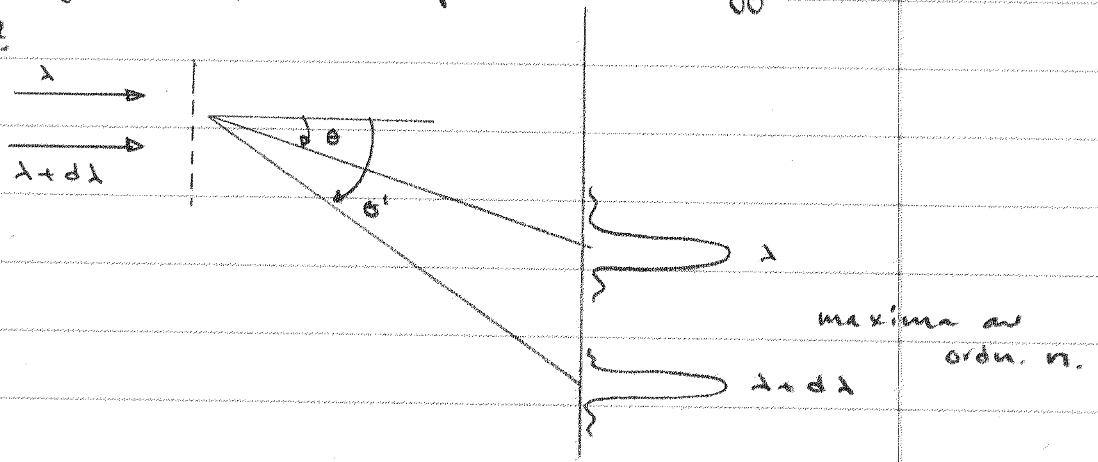
Mellan två huvudmax.: $N-1$ minima
$N-2$ sek. maxima.

Gittrets upplösningsförmåga

: $a \cdot \sin\theta = n\lambda$

ju större λ desto större θ !

Hur bra är gittret på att separera närliggande våglängder ?



Hur stort är $d\lambda$ när vågl. $(\lambda + d\lambda)$ har maximum vid samma vinkel θ' där vågl. λ har minimum (närmast principalmax) ?

λ : max då $a \cdot \sin\theta = n\lambda$

min $a \cdot \sin\theta' = \frac{n \cdot N + 1}{N}\lambda$

$\lambda + d\lambda$: max $a \cdot \sin\theta' = n(\lambda + d\lambda)$

$\Rightarrow \frac{nN+1}{N}\lambda = n(\lambda + d\lambda) \quad \Rightarrow \quad d\lambda = \frac{\lambda}{nN}$

eller $\boxed{\frac{\lambda}{d\lambda} = nN}$

allm. regel : ju fler vågor som interferera desto smalare maxima.

ex. $\lambda = 5000$ Å

$d\lambda = 1$ Å

$n = 1$ $\Rightarrow \frac{\lambda}{d\lambda} = 5000 \therefore N = 5000$

dvs ett gitter med 5000 ritsar krävs för upplösn.

Fassprång: 0 vid refl. mot tunnare medium
π tätare

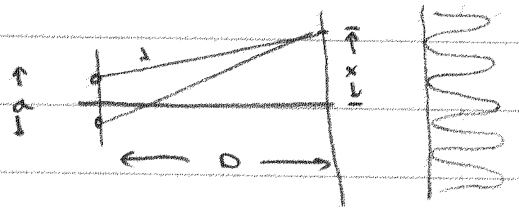
Förläsning 9

Rep. Interferens

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos\delta} \Rightarrow I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cdot \cos\delta$$

$$I_1 = I_2 = I \Rightarrow I_{tot} = 2I_1 + 2I_1 \cdot \cos\delta = 4I_1 \cdot \cos^2\frac{\delta}{2}$$

Young:



$$x = \frac{nD}{a}\lambda$$

ex. $a = 0{,}8$ mm $D = 5 \cdot 10^{-1}$ m $\lambda = 5900$ Å

$\Rightarrow x = 0{,}37 \cdot n$ mm $\quad$ 0,37 mm

N synkr. källor.

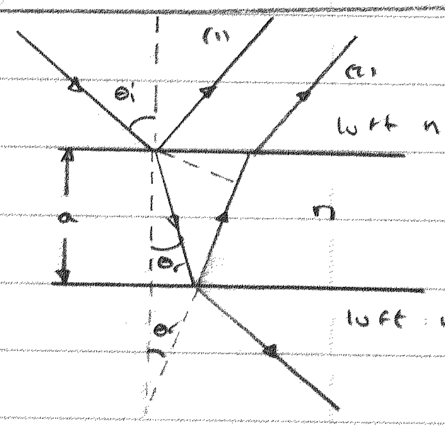
$$I = I_0 \frac{\sin^2 N\frac{\delta}{2}}{N^2 \sin^2\frac{\delta}{2}}$$

max: $a \cdot \sin\theta = n\lambda \quad \delta = 2\pi \cdot n$

min: $\frac{\delta}{2} = \frac{p}{N}\pi \quad \frac{p}{N}$ ej heltal

---

Planparallell platta:



optisk
Vägskillnad mellan strålarna (1) och (2) $= 2an \cdot \cos\theta_r$

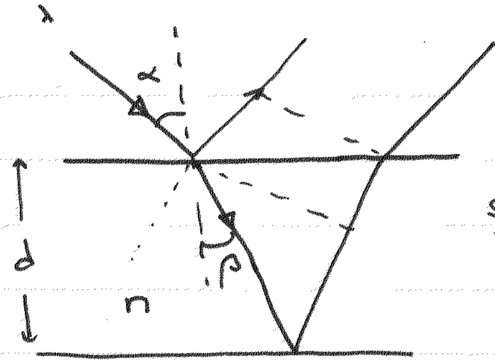
Inkludera att (1) reflekterats en gång mot tätare medium

max $\quad 2an \cdot \cos\theta_r - \frac{\lambda}{2} = N \cdot \lambda \Rightarrow 2an \cdot \cos\theta_r = \frac{1}{2}(2N+1)\lambda \quad N = 0, 1, 2 \ldots$

$2an \cdot \cos\theta_r = (N+1)\lambda \quad N = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Transmission: byt max mot min i uttrycken ovan

27.



Givet: $\lambda = 5893\ \text{Å} = 0.5893 \cdot 10^{-6}\ m$

$\alpha = 30^\circ$

$n = 1.52$

Sökt: d för minimal refl. intensitet.

m = heltal

Minimum då: $2nd \cos\rho = m\lambda$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda}{2n \cdot \cos\rho} \cdot m$$

Brytningslagen ger:

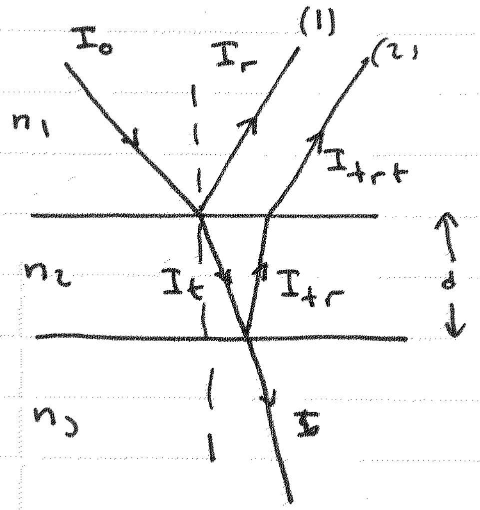
$$1 \cdot \sin\alpha = n \cdot \sin\rho$$

$$\Rightarrow \sin\rho = \frac{\sin 30^\circ}{n} \Rightarrow \rho = 19.20^\circ$$

$$d = \frac{0.5893 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 1.52 \cdot \cos 18.45^\circ} \cdot m = 2050\ \text{Å} \cdot m$$

m = heltal > 0

Antireflexbehandling



$n_3 > n_2 > n_1$

Obs!
Infallsvinkeln är $\approx 0°$.
Strålarna i figuren har
"ritats med $\theta_i \gg 0°$ av
pedagogiska skäl"

Destruktiv interferens: $\quad 2n_2 \cdot d = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{\lambda}{4 \cdot n_2} \quad \text{ger motfas.}$$

Val av n_2 så att $I_r = I_{trt}$.
Normalt infall:

$$I_r = I_0 \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2$$

här

$$I_r = I_0 \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 \qquad I_{tr} = I_t \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right)^2$$

Små minskn. i intensitet vid varje refl.

$$\Rightarrow \quad I_t \approx I_0$$
$$I_{trt} \approx I_{tr}.$$

$$\Rightarrow \quad I_{tr} \approx I_0 \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right)^2.$$

Utsläckning $\quad I_r = I_{trt} \quad \Rightarrow \left(\frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1} \right)^2 = \left(\frac{n_3 - n_2}{n_3 + n_2} \right)^2$

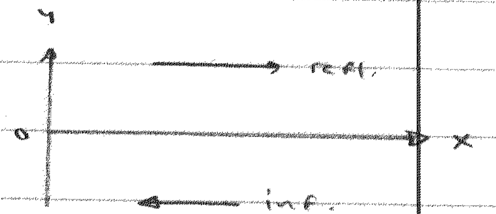
$$\Rightarrow \quad n_2 = \sqrt{n_1 \cdot n_3}$$

Föreläsning 10.

<u>Stående vågor</u>: ~~Ava~~ Viktigt för det centrala fenomenet "partikel i låda" i kvantmekaniken. Grunden för behandling av "fria partiklar"

<u>En dimension</u>

i) stående våg på en sträng:



$$\xi = A \cdot \sin(\omega t + kx) + A' \cdot \sin(\omega t - kx)$$

Vid $x=0$ är strängen fixerad $= \xi_{x=0} = (A + A')\sin\omega t$

$\Rightarrow A = -A'$: fasförskjutning vid refl. i $x=0$

$$\Rightarrow \xi = A \cdot \left[\sin(\omega t + kx) - \sin(\omega t - kx)\right] =$$

$$= \underbrace{2A \cdot \sin kx}_{} \cdot \sin\omega t$$ stående våg.

→ lägesberoende amplitud.

Amplitudens nollställen : $x = \frac{1}{2} n \lambda$ (noder)

maxima : bukar

Fixera även i $x = L$! $\Rightarrow L = n\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} = 2L, L, \frac{2}{3}L, \ldots$

$$k = n \cdot \frac{\pi}{L}$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{nv}{2L} \\ v = \sqrt{\dfrac{T}{m}} \end{array}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{m}}$$

$n=1$ grundfrekv.

$n=2$ 1:a överton

$n=3$ 2:a —"—

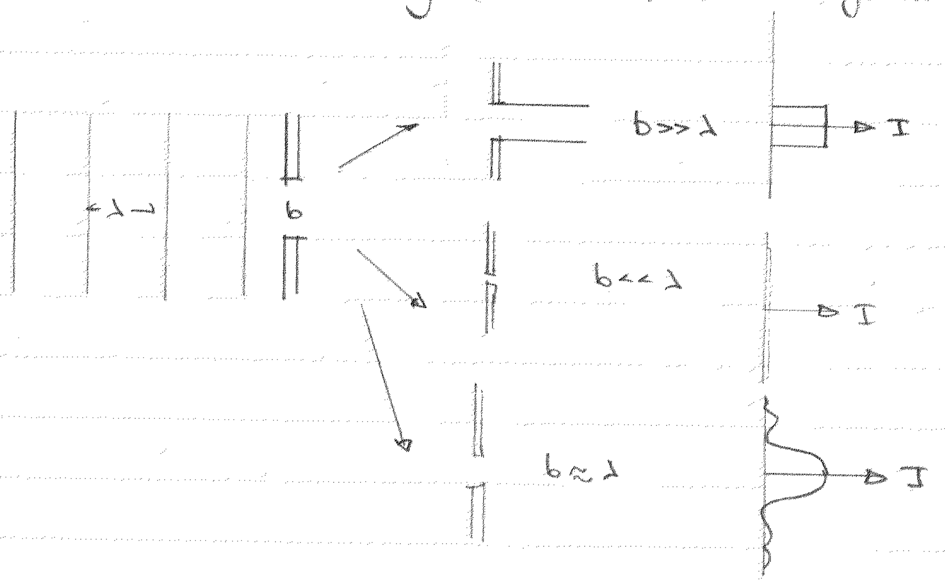
T = spännkraft i N

m = massa per längd kg/m

Böjning – diffraktion

Huygens princip: varje punkt på en vågfront utgör en källa för en sfärisk våg.

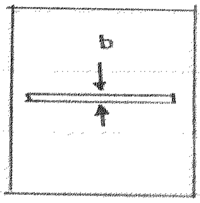
⇒ en plan våg fortsätter att vara plan om dess utsträckning (i sidled) inte begränsas.

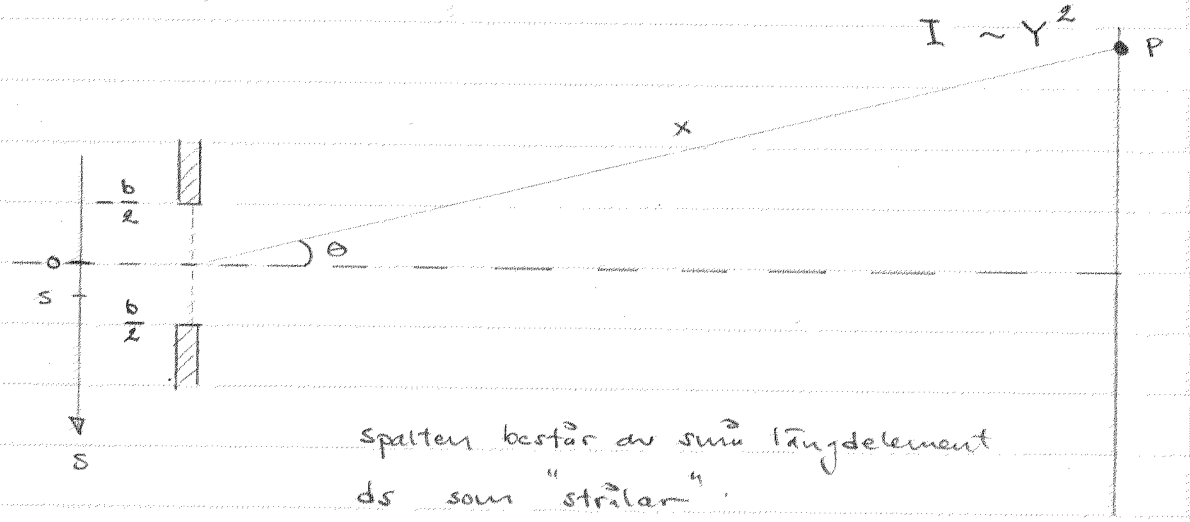


Långt ifrån ljuskälla/hinder kan vågorna anses vara plana.

Vi kommer att anta att så är fallet. Vi studerar specialfallet Fraunhoferdiffraktion: plan våg in & plan våg ut.

Böjning i en spalt.





spalten består av små längdelement ds som "strålar".

Beräkna resulterande störning i P!

Bidrag till störningen från ds i mitten av spalten ($s=0$)

0: $$dy_0 = a \cdot ds \cdot \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

Bidrag från ds på avståndet s från spaltcentrum

s: $$dy_s = a \cdot ds \cdot \sin\left[\omega t - \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right)\right]$$

Hela spalten

$$Y = \int_{-b/2}^{b/2} dy_s$$

Knep: adders först parvis symmetriskt belägna spaltelement

$$dy = dy_s + dy_{-s} = a \cdot ds \left\{ \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right] \right\} =$$

④

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha \cdot \cos\beta$

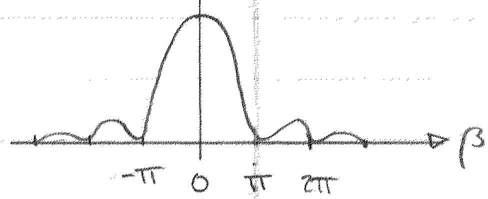
$$= 2a\cdot ds \; \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \int_0^{b/2} \cos 2\pi \frac{s\cdot\sin\theta}{\lambda}\, ds =$$

$$= a\cdot b \; \frac{\sin \frac{\pi b\cdot \sin\theta}{\lambda}}{\frac{\pi b\cdot\sin\theta}{\lambda}} \; \sin\left(\omega t - 2\pi\frac{x}{\lambda}\right)$$

Sätt $a\cdot b = A_0$ och $\beta = \frac{\pi b\cdot\sin\theta}{\lambda}$

Vi har en θ-beroende amplitud : $A = A_0 \frac{\sin\beta}{\beta}$

$$\Rightarrow I_\theta \sim A_0^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$



1) Rakt fram: $\theta = 0$

$$\theta \to 0 \Rightarrow \beta \to 0 \qquad \lim_{\beta\to 0} \frac{\sin\beta}{\beta} = 1$$

I rakt fram $= I_0 =$ maximum

$$\therefore I = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

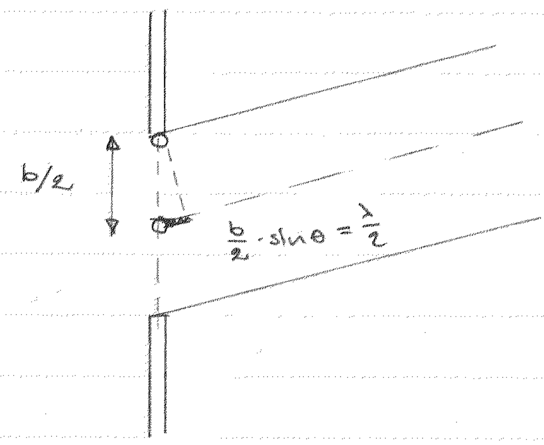
2) nollställen : $\beta = m\pi$ men $m \neq 0$

$\Downarrow$

$\sin\beta = 0$

ex $\beta = \pi \Rightarrow b\cdot\sin\theta = \lambda$

$\Rightarrow \frac{b}{2}\cdot\sin\theta = \frac{\lambda}{2}$



3) <u>sekundärmaxima</u>

$$\frac{dI}{d\beta} = 0 \Rightarrow \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin^2\beta}{\beta^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\beta^2 \cdot 2 \cdot \sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta \cdot 2\beta}{\beta^4} = 0$$

$$\Rightarrow \tan\beta - \beta = 0$$ löses grafiskt.

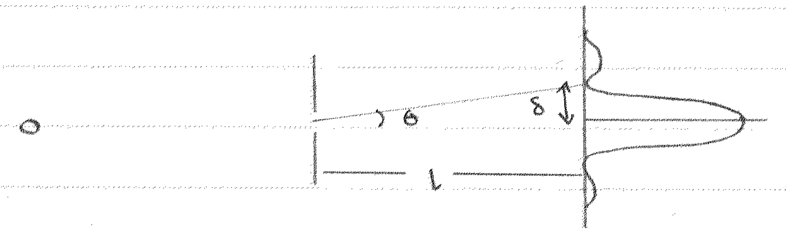
approximativt: $b \cdot \sin\theta = (m + \frac{1}{2})\lambda$

$m = 1$: $b \sin\theta = 3\frac{\lambda}{2}$

$m = 2$: $b \cdot \sin\theta = 5\frac{\lambda}{2}$

<u>Upplösningsförmåga</u>

Betrakta ett föremål t.ex. en stjärna på långt avstånd genom en spalt



stort b ger liten bildfläck.

1:a min: $\left.\begin{array}{l} b \cdot \sin\theta = \lambda \\ \sin\theta \approx \frac{\delta}{l} \end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \frac{\lambda}{b} \cdot l$

rund öppning: diameter D

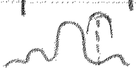
$$\delta' = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \cdot l$$

Avbildning i fokalplanet ($l = f$)

Plana vågor $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \delta' = 1{,}22 \frac{\lambda}{D} \cdot f$$

Två föremål är knappt upplösta om deras diffr. mönster är sådana att den enas principalmax. sammanfaller med den andras 1:a min



Rayleighs kriterium