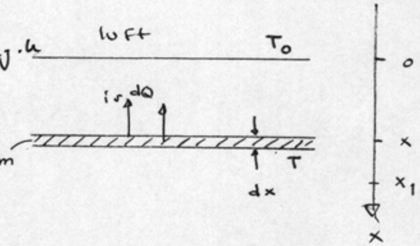
1. Ytan av en stor sjö, vattentemperatur 0 grader, har temperaturen – 3 grader Celsius. Beräkna hur lång tid det tar att bilda ett 5 cm tjockt islager om vi antar att all värmetransport sker genom ledning. Isbildningsvärmet sätts till 3,3 $10^5$ J/kg, medan övriga nödvändiga data hämtas ur tabellverk.

---

Lösning:

Givet: $T_0 = -3\,^\circ C$  $\rho_{is} = 917\ kg/m^3$
$T = 0\,^\circ C$  $\lambda_{is} = 2,1\ W/m\cdot K$
$L = 3,3\cdot 10^5\ J/kg$  $c_{is} = 2,2\cdot 10^3\ J/kg\cdot K$
$x_1 = 5\ cm$




Sökt: t för $x_1$

När is bildas frigörs energi enligt $-dQ = L\cdot dm \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = L\cdot\frac{dm}{dt}$

Temperaturskillnaden $T-T_0$ driver värmetransporten enligt:

$$-\frac{dQ}{dt} = +\lambda_{is}\cdot S\,\frac{dT}{dx} = \lambda_i\cdot S\,\frac{T-T_0}{x}$$ $S \approx$ hela sjöns yta

(I "vanliga" fall $-\lambda S\frac{dT}{dx}$ men här pekar vår koordinataxel (x) från kallt till varmt och då behövs inte minustecknet eftersom $\frac{dT}{dx} > 0$)

$$\therefore\ L\,\frac{dm}{dt} = \lambda_{is}\cdot S\cdot\frac{T-T_0}{x}$$
men $dm = S\cdot dx\cdot\rho_{is}$

$$\Rightarrow L\cdot\cancel{S}\cdot\rho_{is}\frac{dx}{dt} = \lambda_{is}\,\cancel{S}\,\frac{T-T_0}{x}$$

$$\Rightarrow x\cdot dx = \frac{\lambda_{is}\cdot(T-T_0)}{\rho_{is}\cdot L}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{x_1} x\cdot dx = \frac{\lambda_{is}(T-T_0)}{\rho_{is}\cdot L}\int_0^t dt \qquad \Rightarrow t = \frac{x_1^2\,\rho_{is}\,L}{2\lambda_{is}\cdot(T-T_0)} =$$

$$= \frac{(0,05)^2\cdot 917\cdot 3,3\cdot 10^5}{2\cdot 2,1\cdot 3} \approx \underline{\underline{60\,000\ s}} = \underline{16,7\,h}$$

---

I våra räkningar har vi försummat att islagret mellan 0 och $x_1$ också kyls ned under isbildningsprocessen. Den genomsnittliga temperatursänkningen är $(T-T_0)/2$ dvs 1,5 grader i vårt fall

$Q_1$ = värme som måste ledas bort pga sänkning av istemperaturen =
$= S\cdot x_1\cdot\rho_{is}\cdot c_{is}\cdot(T-T_0)/2$

$Q_2$ = värme som måste ledas bort pga fasomvandlingen vatten → is =
$= S\cdot x_1\cdot\rho_{is}\cdot L$

$$\Rightarrow \frac{Q_2}{Q_1} = \frac{L}{c_{is}\cdot\underline{T-T_0}} = \frac{3,3\cdot 10^5}{2,2\cdot 10^3\cdot 1,5} \approx 100$$ $\therefore$ Ok att försumma

8. En kastrull med 1,5 cm tjock kopparbotten står på en värmeplatta. Bottenarean är 1500 kvadratcentimeter. I kastrullen kokar vatten vid 100 grader Celsius och 750 g kokar bort på 5 minuter. Beräkna temperaturen på den sida av bottnen som är i kontakt med värmeplattan.

---

Lösning:

Givet: $l = 1{,}5$ cm

Cu

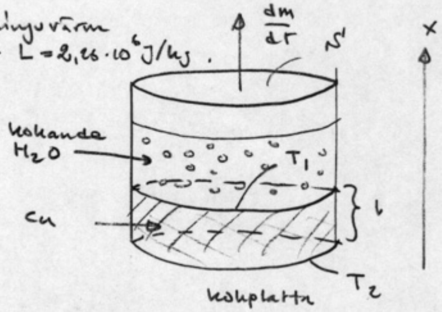
$S = 1500\ \text{cm}^2$

$T_1 = 100°C$

$-\frac{dm}{dt} = 750$ g på 5 minuter

Sökt: $T_2$

ångbildningsvärme för $H_2O$: $L = 2{,}26 \cdot 10^6$ J/kg.




$\lambda_{Cu} = 380$ W/m,K

$dQ = dm \cdot L$ : tillförd värme $dQ$ för att göra om massan $dm$ från 100°C-igt vatten till 100°C-ig vattenånga

$\Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = -\frac{dm}{dt} \cdot L$ = tillförd effekt genom kopparbottnen.

$$\therefore \quad -\frac{dm}{dt} \cdot L = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dx} = -\lambda \cdot S \frac{T_1 - T_2}{l} = \lambda S \frac{T_2 - T_1}{l}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 + \frac{\left(-\frac{dm}{dt}\right) \cdot L \cdot l}{\lambda S} = 100°C + \frac{\left(\frac{0{,}750}{5 \cdot 60}\right) \cdot 2{,}26 \cdot 10^6 \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-2}}{380 \cdot 1500 \cdot 10^{-4}} =$$

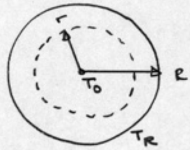
$$= 100 + 1{,}5 = \underline{\underline{101{,}5°C}}$$

7. Ett klot av uran har radien R=100 mm. På grund av klyvning av atomkärnor genereras värme uniformt i hela klotet så att varje sekund utvecklas 70 mJ/mol. Uran har värmeledningsförmågan 46 W/m K.
Hur stor blir temperaturskillnaden mellan klotets centrum och dess periferi?

---

Lösning:

Givet: $\lambda = 46 \text{ W/m·K}$
$R = 100 \text{ mm}$
$P/\text{mol} = 70 \text{ mW}$




Sökt: $\Delta T = T_0 - T_R$

Ur tabell: $\rho = 18{,}7 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
atomvikt U $= 238u = 238 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = m_{atom}$

Innanför radien r har vi volymen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Denna volym innehåller massan $M(r) = \rho\, V(r)$

Antal atomer i $M(r)$: $N(r) = \frac{M(r)}{m_{atom}} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{m_{atom}}$

Antal mol inom radien r $n'(r) = \frac{N(r)}{N_A} = \frac{4\pi r^3 \rho}{3 \cdot m_{atom} \cdot N_A}$

Total effektutveckling inom radien r $P(r) = n'(r) \cdot \frac{P}{mol}$

---

$$\left.\begin{array}{l} P(r) = -\lambda \cdot S \cdot \frac{dT}{dr} \\ S = 4\pi r^2 \end{array}\right\} \Rightarrow P(r) = -\lambda \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{dT}{dr}$$

$$\therefore \frac{4\pi r^3 \cdot \rho \cdot \left(\frac{P}{mol}\right)}{3 \cdot m_{atom} \cdot N_A} = -\lambda\, 4\pi r^2 \frac{dT}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{\rho\,(P/mol)}{3 \cdot m_{atom} \cdot N_A} \int_0^R r \cdot dr = -\lambda \int_{T_0}^{T_R} dT$$

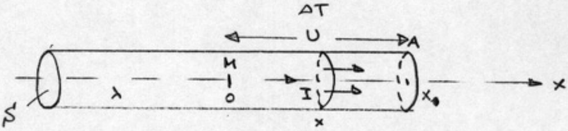
$$\Rightarrow \frac{\rho\,(P/mol)}{3 \cdot m_{atom}\, N_A \cdot \lambda}\, \frac{1}{2} R^2 = -(T_R - T_0) = T_0 - T_R$$

$$\Rightarrow T_R - T_0 = \frac{18{,}7 \cdot 10^3 \cdot 70 \cdot 10^{-3} \cdot (100 \cdot 10^{-3})^2}{6 \cdot 238 \cdot 1{,}66 \cdot 10^{-27} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot ...} = \underline{\underline{0{,}20 \text{ K}}}$$

6. En jämntjock homogen metalltråd uppvärms med en konstant elektrisk ström. Tråden är isolerad så att värme endast kan avledas genom dess ändytor. Vid stationärt tillstånd har en sektion A av tråden, belägen 50 mm från mitten M, 7,5 K lägre temperatur än mittpunkten. Potentialskillnaden mellan sektionerna A och M är 10,0 mV. Metalltrådens resistivitet är 1,72 $10^{-8}$ Ωm. Bestäm trådmaterialets värmeledningsförmåga.

Lösning:

Givet: $U = 10{,}0$ mV
$\Delta T = 7{,}5$ K
$x_1 = 50$ mm
$\rho = 1{,}72 \cdot 10^{-8}$ Ωm




Sökt: $\lambda$

Effektutveckling mellan $x = 0$ och $x$. $P(x) = R(x) \cdot I^2 =$

$$= \rho \frac{x}{S'} \cdot \left( \frac{U}{\rho \frac{x_1}{S'}} \right)^2 = \frac{U^2 S'}{\rho x_1^2} \cdot x$$

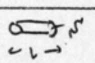
Vid stationära förhållanden transporteras $P(x)$ genom $S'$ vid $x$.

$$\left.\begin{array}{l} P(x) = -\lambda \cdot S' \cdot \frac{dT}{dx} \\ P(x) = \frac{U^2 S'}{\rho x_1^2} x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{U^2 \cancel{S'}}{\rho x_1^2} x = -\lambda \cancel{S'} \cdot \frac{dT}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{\rho x_1^2} \int_0^{x_1} x \cdot dx = -\lambda \int_{T_0}^{T_1} dT = -\lambda \cdot (T_1 - T_0) = \lambda \cdot \Delta T$$

$$\Rightarrow \frac{U^2}{\rho x_1^2} \frac{1}{2} x_1^2 = \lambda \cdot \Delta T \qquad \Rightarrow \lambda = \frac{U^2}{2\rho \cdot \Delta T} =$$

$R = \rho \frac{l}{S'}$




$I = \frac{U}{R} = \frac{U \cdot S'}{\rho \cdot l}$

$$= \frac{(10{,}0 \cdot 10^{-3})^2}{2 \cdot 1{,}72 \cdot 10^{-8} \cdot 7{,}5} \text{ W/m·K} =$$

$$= 387 \text{ W/m·K} = \underline{\underline{3{,}9 \cdot 10^2 \text{ W/m·K}}}$$

5. Uppskatta temperatursänkningen av jordens inre med hjälp av följande data:
- för att öka jordklotets temperatur 1 grad krävs en tillförd värmemängd på 2,5 MJ per kubikmeter.
- I jordskorpan är temperaturökningen i djupled ca 0,03 grader per meter och värmeledningsförmågan är 2,0 W/m K.
- Jordens omkrets är ca 4000 mil.

Vid beräkningen är det tillåtet att göra approximationen att jordklotet är homogent.

---

Lösning:

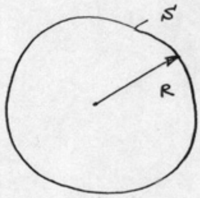
$\lambda = 2{,}0 \ \mathrm{W/mK}$

Givet: $c = 2{,}5 \ \mathrm{MJ/m^3}$

$\left(\frac{dT}{dr}\right)_R = 0{,}03 \ \mathrm{K/m}$

$R = 4000 \ \mathrm{mil}$

Sökt: $\Delta T$




Totalt värmeflöde från jorden

$$-\frac{dQ}{dt} = H = -\lambda S \frac{dT}{dr} = \lambda \cdot 4\pi R^2 \left(\frac{dT}{dr}\right)$$

På ett år förlorar jorden energimängden $-Q = H \cdot t$ där $t$ är antalet sekunder på ett år.

Årlig värmeförlust per år och $m^3$:

$$\Omega = \frac{Ht}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3\lambda \frac{dT}{dr} \cdot t}{R}$$

$$\Omega = c \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{\Omega}{c}$$

$$\therefore \quad \Delta T = \frac{3\lambda \frac{dT}{dr} \cdot t}{Rc} = \frac{3 \cdot 2{,}0 \cdot 0{,}03 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60}{4000 \cdot 10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^6} =$$

$$= \underline{\underline{4 \cdot 10^{-7} \ \text{grader}}}$$

4. En sfärisk behållare med radien 1,0 m är fylld med en viss idealgas. Behållarens väggar är tillverkade av ett material som har egenskapen att sannolikheten B är 1/4 för att en molekyl som stöter mot en av väggarna ska fastna. Beräkna, under antagandet att B håller sig konstant, hur lång tid det tar innan trycket i behållaren sjunkit till hälften av sitt utgångsvärde. Gasmolekylernas medelhastighet sätt till 500 m/s.

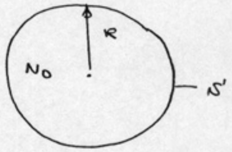
---

Lösning :

Givet : $R = 1{,}0$ m

$B = \frac{1}{4}$

$\langle v \rangle = 500$ m/s




Sökt : $t$ för $N_0 \to N_0/2$

egentligen $p_0 \to p_0/2$ men det är samma tid.

Antalet molekyler som fastnar på insidan ($S = 4\pi R^2$) under tiden $dt$ leder till en minskning av antalet gasmolekyler i behållaren ändrar :

$$dN = B \cdot n^* \cdot S' \cdot dt$$

$$dN = -\frac{1}{4}\frac{N}{V}\langle v \rangle \cdot B \cdot S \cdot dt = -\frac{1}{4}\frac{B \cdot N \langle v \rangle}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi R^2 \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{N} = -\frac{3B\langle v \rangle}{4R} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{N_0}^{N_0/2} \frac{dN}{N} = -\frac{3B\langle v \rangle}{4R} \int_0^t dt$$

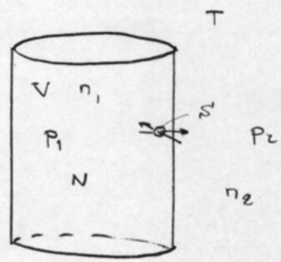
$$\Rightarrow \ln\frac{1}{2} = -\frac{3B\langle v \rangle}{4R} \cdot t$$

$$\Rightarrow t = -\frac{4 \cdot \ln\frac{1}{2}}{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 500} = \underline{\underline{7{,}4 \cdot 10^{-3}}} \text{ s}$$

3. I väggen till en behållare, som innehåller 2,0 l syre, finns ett litet hål. Trycket i behållaren faller därvid från 801 till 800 torr på en minut. Behållaren omges av syrgas vid normalt atmosfärstryck. Temperaturen är 20 grader Celsius. Beräkna hålets storlek.

---

Lösning:




Givet: $p_1 = 801$ torr

$\Delta p = -1$ torr

$\Delta t = 1$ min $= 60$ s

$p_2 = 760$ torr

$T = 293$ K

Sökt: $S$

stöttalet $n^* = \frac{1}{4} n\langle v\rangle$

Medelhastigheten:

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M_{mol}}} \qquad O_2 : M_{mol} = 32 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$\Rightarrow \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{\pi \cdot 32 \cdot 10^{-3}}} \text{ m/s} = 440 \text{ m/s}$$

Det läcker ut och läcker in $O_2$-molekyler i behållaren.

$$dN = -\frac{1}{4} n_1 \langle v\rangle S \cdot dt + \frac{1}{4} n_2 \langle v\rangle S \cdot dt \qquad (1)$$

Såväl $n_1$ som $n_2$ kan betraktas som konstanta under förloppet eftersom 1 torr är litet relativt 800 torr och eftersom omgivningen antas vara "stor" dvs $n_2$ påverkas inte nämnvärt.

Vi utnyttjar relationen $p = \frac{N}{V} kT \Rightarrow N = \frac{pV}{kT}$ och $n = \frac{p}{kT}$

$dN = \frac{V}{kT} \cdot dp$

(1) blir nu:

förändr. av trycket i behållaren

$$\frac{V}{kT} \cdot dp = \frac{1}{4} \frac{\langle v\rangle S}{kT} (p_2 - p_1) \cdot dt$$

$$\Rightarrow \frac{V}{kT} \underbrace{\int dp}_{\Delta p} = \frac{1}{4} \frac{\langle v\rangle \cdot S}{kT} (p_2 - p_1) \underbrace{\int dt}_{\Delta t}$$

$$\Rightarrow S = \frac{4V}{\langle v\rangle (p_2 - p_1)} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{4 \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-3} \; (-1)}{440\,(760 - 801)\, 60} \text{ m}^2 = 7 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 =$$

$$\underline{\underline{= 7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^2}}$$

2. En Y-konstruktion har tre identiska 10, 0 cm långa kopparben som har tvärsnittsarean 1,0 kvadratcentimeter. Två av benen är förbundna (i toppen av Y:et) med ett aluminiumblock, vars massa är 70,0 kg. Det tredje benets ände hålls vid temperaturen 20 grader Celsius. Hela anordningen befinner sig i vakuum och strålningsförlusterna kan försummas. Dessutom görs approximationen att den energi som åtgår för att värma upp kopparbenen kan försummas. Hur lång tid tar det för aluminiumblocket att nå temperaturen 60 grader Celsius om dess begynnelsetemperatur är 100 grader Celsius?

---

<u>Lösning:</u>

$c_{Al} = 903$ J/kg·K

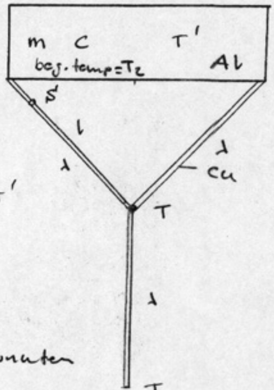
$\lambda_{Cu} = 400$ W/m·K

Givet: $l = 10{,}0$ cm  $m = 70{,}0$ kg

$S = 1{,}0\ \text{cm}^2$  $T_0 = 20°C$ (konstant)

$T_2 = 100°C$

Sökt: $t$ för $T' = 60°C = T_3$




Sänkning av Al-blockets temperatur $dT'$ kräver värmetransport

$$dQ = m \cdot c \cdot dT' \Rightarrow -\frac{dQ}{dt} = -mc\,\frac{dT'}{dt}$$

Värmen leds genom Cu-benen (2 ben)

$$-\frac{dQ}{dt} = \lambda_{Cu} 2S\,\frac{T'-T}{l} \qquad T = \text{temp i knutpunkten}$$

Såväl $T'$ som $T$ varierar. Hur är relationen mellan $T$, $T'$ och $T_0$?

Vid knutpunkten: värmeflöde in = värmeflöde ut

$$\Rightarrow 2\lambda S\,\frac{T'-T}{l} = \lambda S\,\frac{T-T_0}{l} \quad \Rightarrow 2T' - 2T = T - T_0$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{3}(2T' - T_0) \quad \Rightarrow T' - T = \frac{1}{3}(T' - T_0)$$

$$\therefore -mc\,\frac{dT'}{dt} = 2\lambda S\,\frac{\frac{1}{3}(T'-T_0)}{l} \quad \Rightarrow \int_0^t dt = \frac{3mcl}{2\lambda S}\int_{T_2}^{T_3}\frac{dT'}{T'-T_0}$$

$$\Rightarrow t = -\frac{3mcl}{2\lambda S}\ln\frac{T_3-T_0}{T_2-T_0} = -\frac{3\cdot 70{,}0\cdot 903\cdot 0{,}10}{2\cdot 400\cdot 1{,}0\cdot 10^{-4}}\cdot \overbrace{\ln\frac{60-20}{100-20}}^{\ln\frac{1}{2}} =$$

$$= 1{,}643\cdot 10^5\ \text{s} = \underline{\underline{45{,}6\ \text{h}}}$$