Rörelsemängd.

I vid mening bevaras den totala energin för ett isolerat system. Om de enda krafter som verkar är konservativa, bevaras den mekaniska energin. Summan av potentiell energi och kinetisk energi är konstant.

Nu kommer vi till ytterligare en storhet som är bevarad för ett isolerat system; rörelsemängden

Rörelsemängden för en partikel $\bar{p}$ definieras enligt

$$\bar{p} \equiv m\bar{v}$$

$$\Rightarrow \quad p_x = mv_x \;,\; p_y = mv_y \;,\; p_z = mv_z$$

Newtons 2:a lag kan nu skrivas: $\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) =$

$$= \frac{dm}{dt}\cdot\bar{v} + m\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{dm}{dt}\bar{v} + m\bar{a}$$

Om massan är konstant $\left(\frac{dm}{dt} = 0\right)$: $\bar{F} = m\bar{a}$

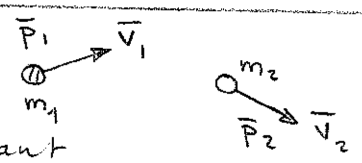
$$\bar{F} = \frac{d\bar{p}}{dt} \Rightarrow d\bar{p} = \bar{F}\,dt$$

$$\Rightarrow \Delta\bar{p} = \int d\bar{p} = \bar{p}_f - \bar{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \bar{F}\,dt \equiv \text{impulsen} = \text{ändringen av rörelsemängd}$$

Tröghetslagen: En fri partikel rör sig med konstant rörelsemängd

---

Två partiklar isolerade från omgivningen:



$$\bar{P} = \bar{p}_1 + \bar{p}_2 = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 = m_1\bar{v}_1' + m_2\bar{v}_2' = \text{konstant}$$

$$\Rightarrow \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d\bar{p}_1}{dt} + \frac{d\bar{p}_2}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{p}_1}{dt} = -\frac{d\bar{p}_2}{dt}$$

men $\frac{d\bar{p}_1}{dt} = \bar{F}_1 = \bar{F}_{12}$

och $\frac{d\bar{p}_2}{dt} = \bar{F}_2 = \bar{F}_{21}$

$$\therefore \boxed{\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}}$$

För ett helt system med i st partiklar som är isolerat från omgivningen gäller

$$\bar{P} = \sum_i \bar{p}_i = \text{konstant}$$

Kollisioner

Helt oelastisk kollision : kropparna fastnar vid varandra · gemensam sluthastighet

rörelsemängden bevaras, men inte rörelseenergin.

$$m_1 \bar{v}_{1i} + m_2 \bar{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\,\bar{v}_f$$

$$\Rightarrow \quad \bar{v}_f = \frac{m_1 \bar{v}_{1i} + m_2 \bar{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

1 dim

Helt elastisk kollision : såväl $\bar{P}$ som ΣE_{kin} bevaras.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_1 \bar{v}_{1i} + m_2 \bar{v}_{2i} = m_1 \bar{v}_{1f} + m_2 \bar{v}_{2f} & (1) \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 & (2) \end{cases}$$

(2) ger $\quad m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 (v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$

$$\Rightarrow m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i}) \quad (2')$$

$v > 0 \;\rightarrow$
$v < 0 \;\leftarrow$

(1) ger $\quad m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 (v_{2f} - v_{2i}) \quad (1')$

$\frac{(2)'}{(1)'}$ ger nu $\quad \boxed{v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}} \qquad (3)$

eller $\quad v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$

relativa hastigheten efter kollisionen är lika stor som relativa hastigheten efter kollisionen, men med ombytt tecken med (1') och (3)

om vi så vill

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{2i}$$

tecken måste inkluderas

$v > 0 \longrightarrow$

$v < 0 \longleftarrow$

med m_2 i vila.

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_{1i}$$

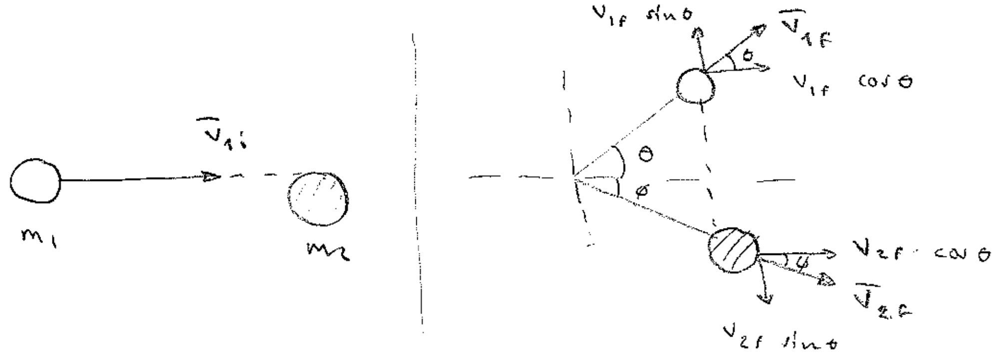
$$m_1 >> m_2 \Rightarrow v_{1f} \approx v_{1i}$$

---

2 dimensionell kollision:

$\bar{P}$ konstant innebär P_x, P_y och P_z alla konstanta

ex



$$\begin{cases} m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cdot \cos\theta + m_2 v_{2f} \cdot \cos\phi \\ 0 = m_1 v_{1f} \cdot \sin\theta - m_2 v_{2f} \sin\phi \end{cases}$$

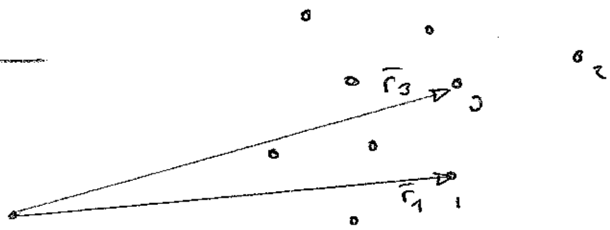
Om kollisionen dessutom är elastisk har vi

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

Om vi känner v_{1i} och massorna m_1 och m_2 har vi fyra obekanta v_{1f}, v_{2f}, θ och ϕ men bara tre ekvationer

För lösning måste vi känna någon av de obekanta vinklarna θ el. ϕ

Tyngdpunkt



$$\bar P = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar v_i = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \bar r_i\right)$$

$M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$ = totala massan

Definiera tyngdpunktens läge $\bar R$ enligt

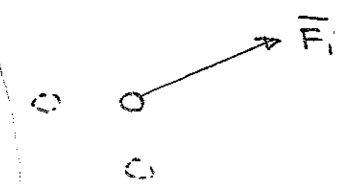
$$\bar R \equiv \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{n} m_i \bar r_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar P = \frac{d}{dt}(M\bar R)}$$

systemets totala rörelsemängd $\bar P$ är lika med totala massan gånger tyngdpunktens hastighet.

Vad bestämmer tyngdpunktens acceleration?

$$\frac{d\bar P}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar p_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar F_i$$



men

$$\sum_{i=1}^{n} \bar F_i = \sum_{i=1}^{n} \bar F_i^{ext} + \underbrace{\sum_i \left(\sum_{i \neq j} \bar F_{ij}\right)}_{=0}$$

$\bar F_i = \bar F_i^{ext} + \bar F_i^{int}$

$$\therefore \frac{d\bar P}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar F_i^{ext}$$

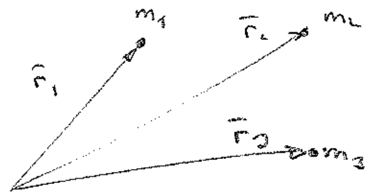
$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}(M\bar R) = \sum_{i=1}^{n} \bar F_i^{ext}.$$

Tyngdpunktens acceleration ges av summan av de externa krafterna som verkar på de individuella partiklarna

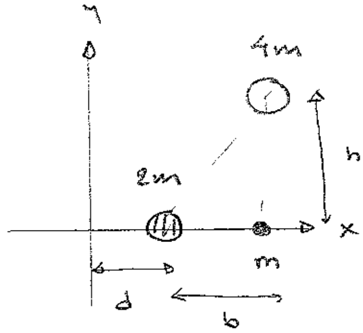
I frånvaro av yttre krafter rör sig tyngdpunkten rätlinjigt $\bar P$ = konstant

Tyngdpunktens läge ges alltså av

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$



ex 1 3 partiklar

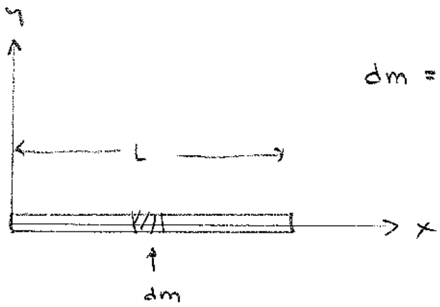


$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{2md + m(d+b) + 4m(d+b)}{7m} = d + \frac{5}{7} b$$

$$y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M} = \frac{0 + 0 + 4mh}{7} = \frac{4}{7} h$$

$$\Rightarrow \bar{r}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} = \left(d + \frac{5}{7} b\right) \hat{i} + \frac{4}{7} \hat{j}$$

ex 2



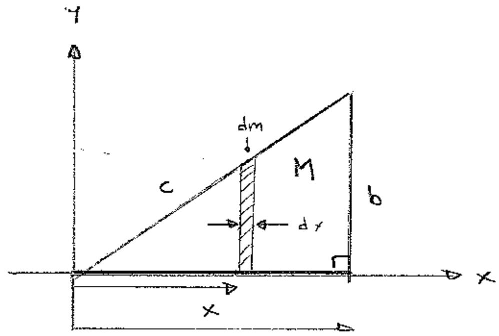
$dm = \lambda \cdot dx$

$\lambda = \frac{dm}{dx}$ = massa / längdenhet

$$x_c = \frac{1}{M} \int_0^L x \cdot dm = \frac{1}{M} \int_0^L x \lambda \, dx = \frac{\lambda}{M} \frac{L^2}{2}$$

men $\lambda = \frac{M}{L}$ $\Rightarrow$ $x_c = \frac{L}{2}$

ex 3 Triangel



$$dm = \frac{\text{Tot. massa}}{\text{Tot area}}\, y\, dx$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}\, y\, dx = \frac{2M}{ab}\, y\, dx$$

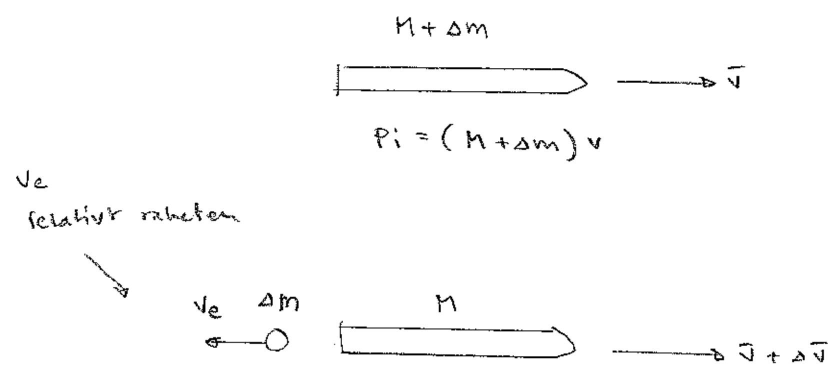
$$y = \frac{b}{a}\cdot x$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{1}{M}\int_0^a x\, dm = \frac{2}{ab}\int_0^a xy\, dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

pss $\quad Y_c = \frac{1}{M}\int_0^b y\, dm = \frac{1}{3}b$ (öva på detta själv!)

---

raketekvationen



$$p_i = (M + \Delta m)v$$

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$\Rightarrow M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

låt $\Delta t \to 0$ och notera att $\Delta m = -\Delta M$ dvs $dm = -dM$

$$\Rightarrow M \cdot dv = -v_e \cdot dM$$

$$\Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Förhållandet mellan ursprunglig och slutlig massa

$$\Rightarrow \boxed{v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

"avgasernas" hastighet