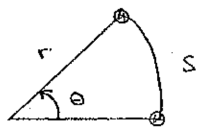
Rotation av en stel kropp runt fix axel.

Vi ska nu studera system av partiklar sådana att de bildar helt stela (otöjbara och oböjbara) kroppar. Vi begränsar oss till rotationer där rotationsaxeln pekar åt samma håll under hela rörelsen

Utvidgningen till kroppar innebär att antalet partiklar som är inblandade blir "oändligt", men ett antal fiffiga definitioner och en "översättningstabell" kan använda mycket av tänkandet från studiet av enskilda partiklar när vi behandlar kroppar.

En stel kropps rörelse (ex metallcylinder som rullar på en väg) kan delas in i två delar, dels tyngdpunktens translationsrörelse och dels rotationen runt tyngdpunkten. När det gäller den senare rörelsen är storheter som vinkel, vinkelhastighet och vinkelacceleration viktiga

med θ i radianer



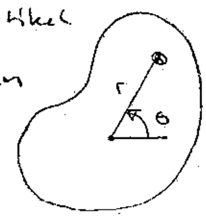
$$s = r\theta$$

$$\frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

el $$v = r\dot{\theta} = r\omega$$

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$$

för fix partikel är avst. till rotationsaxeln r konstant



Vi kan nu ta fram en rad ekvationer som beskriver rotationen genom samma resonemang som vi förde när vi behandlade endimensionell rörelse. Vi byter x mot θ, v mot ω och a mot α

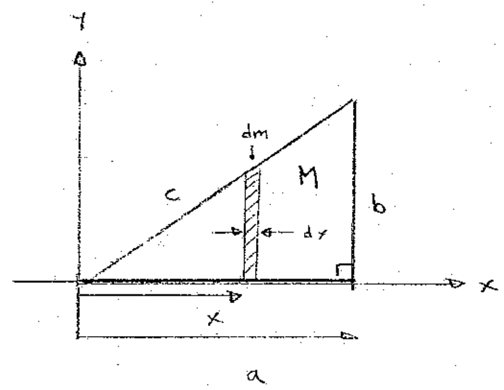
$$\boxed{\begin{array}{lcl} v = v_0 + at & \longrightarrow & \omega = \omega_0 + \alpha t \\ x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t & \longrightarrow & \theta = \theta_0 + \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 & \longrightarrow & \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) & \longrightarrow & \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{array}}$$

Vidare: $v = \omega r \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = a_\theta = \frac{d\omega}{dt} \cdot r$ eller $a_\theta = \alpha \cdot r$

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = r\omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_\theta \qquad a = \sqrt{\alpha^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}$$

ex 3 Triangel



$$dm = \frac{\text{Tot. massa}}{\text{Tot. area}}\, y\, dx$$

$$\Rightarrow dm = \frac{M}{\frac{1}{2}ab}\, y \cdot dx = \frac{2M}{ab}\, y\, dx$$

$$y = \frac{b}{a}\, x$$

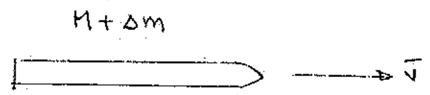
$$\Rightarrow x_c = \frac{1}{M}\int_0^a x\, dm = \frac{2}{ab}\int_0^a xy \cdot dx = \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2 dx = \frac{2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{2}{3}a$$

pss

$$y_c = \frac{1}{M}\int_0^b y\, dm = \frac{1}{3}b \quad \text{(öva på detta själv!)}$$

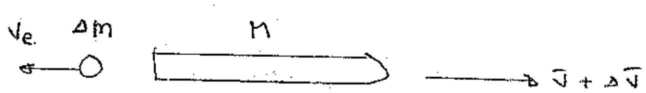
---

raketekvationen



$$p_i = (M + \Delta m)v$$

v_e relativt raketen



$$(M+\Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_e)$$

$$\Rightarrow M\,\Delta v = v_e\,\Delta m$$

låt $\Delta t \to 0$ och notera att $\Delta m = -\Delta M$ dvs $dm = -dM$

$$\Rightarrow M \cdot dv = -v_e\, dM$$

$$\Rightarrow \int_{v_i}^{v_f} dv = -v_e \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

Förhållandet mellan ursprunglig och slutlig massa

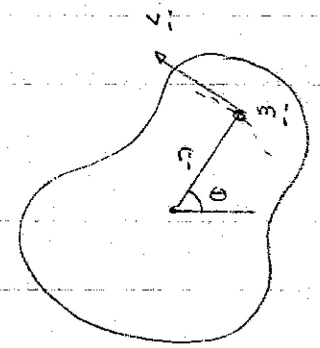
$$\Rightarrow \boxed{v_f - v_i = v_e \ln\left(\frac{M_i}{M_f}\right)}$$

"avgasernas" hastighet

Rotationsenergi.

Partikeln i :

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$



alla partiklar i kroppen rör sig med samma vinkelhast. ω

Hela kroppen :

$$K_R = \Sigma K_i = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \Sigma m_i r_i^2 \omega^2$$

$$\therefore \quad K_R = \frac{1}{2}\left(\Sigma m_i r_i^2\right) \omega^2$$

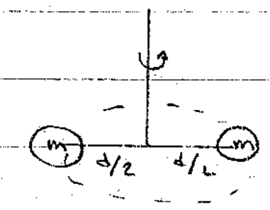
Vi definierar nu tröghetsmomentet I enligt :

$$I \equiv \Sigma m_i r_i^2$$

och skriver

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(kroppens rotationsenergi)}$$

Ex. O_2-molekyl.



$d = 1{,}21 \text{ Å} = 1{,}21 \cdot 10^{-10}$ m

$m = 2{,}66 \cdot 10^{-26}$ kg

$$I = m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + m\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{md^2}{2} = 1{,}95 \cdot 10^{-46} \text{ kgm}^2$$

med $\omega = 4{,}60 \cdot 10^{12}$ rad/s

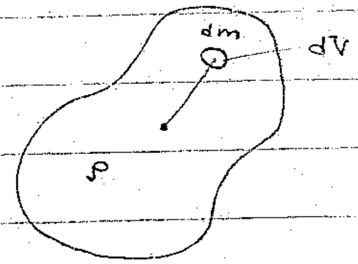
får vi

$$K_R = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} 1{,}95 \cdot 10^{-46} \cdot (4{,}60 \cdot 10^{12})^2 \text{ J}$$

<u>Observera</u> att för en viss kropp beror I på rotationsaxelns läge.

Beräkning av tröghetsmoment (allmänt)

$$I = \int r^2 \, dm$$

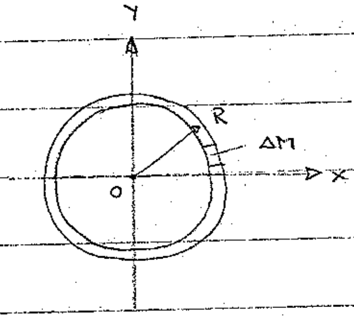


$$dm = dV \cdot \overset{\text{densiteten}}{\rho}$$

$$\Rightarrow \quad I = \int \rho r^2 \, dV$$

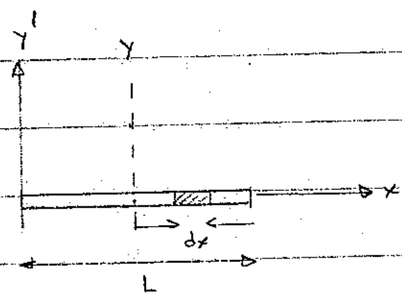
Ibland är det praktiskt att införa massa per ytenhet σ, eller massa per längdenhet λ.

Ex. i) I för en homogent tunn ring vid rotation runt z-axeln



$$I_z = \int r^2 \cdot dm = R^2 \int dm = R^2 \cdot M.$$

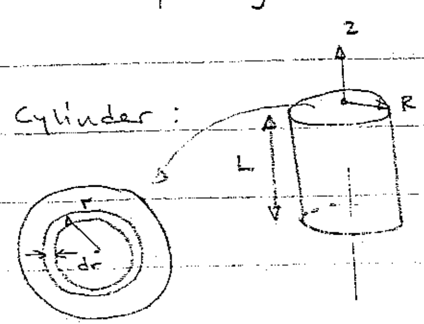
ii) I för en jämntjock stav.



Y: $$I_Y = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} ML^2$$

Y': $$I_{Y'} = \int r^2 dm = \frac{M}{L}\int_0^L x^2 dx = \frac{M}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^L = \frac{1}{3} ML^2$$

iii) Cylinder:



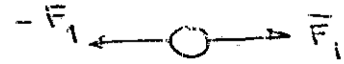
$$I_z = \int r^2 dm = \int_0^R r^2 \overbrace{(2\pi r \cdot dr \cdot L)}^{\text{volym}} \rho =$$

$$= 2\pi \rho L \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \rho L R^4}{2} = (\pi R^2 L) \rho \frac{1}{2} R^2$$

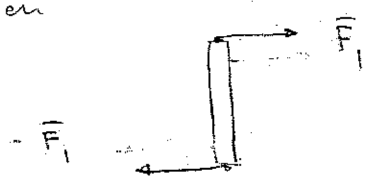
$$= \frac{1}{2} MR^2$$

Moment

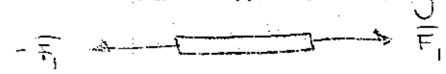
Nödvändigt villkor för jämvikt $\bar{F}_{netto} = 0$



Dock ej tillräckligt om kroppen har utsträckning!



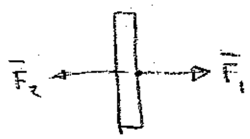
leder till vridning



Villkoret för jämvikt : $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$

$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$

$\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ måste verka längs en gemensam linje som definieras av angreppspunkt och riktning

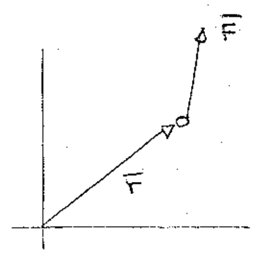


Detta villkor kan formuleras mer kompakt om vi inför begreppet moment (el. kraftmoment) eng torque τ

Vi definierar också rörelsemängdsmomentet $\bar{L}$ som vi ska visa är konstant för en kropp som utsätts för en centralkraft

Vi kommer att behandla vridning och rotation

Om vi inför momentet enligt



$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

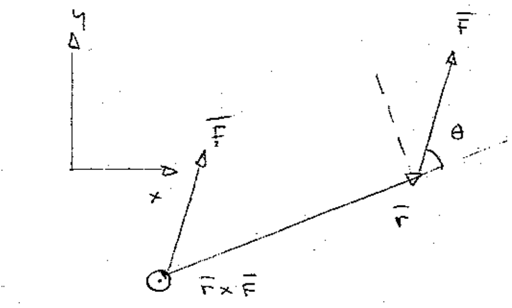
där

$\bar{F}$ = den angripande kraften

$\bar{r}$ = ortsvektorn för den punkt där $\bar{F}$ angriper —

så kan vi skriva villkoret för jämvikt enligt

Två krafter $\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ är ekvivalenta om och endast om $|\bar{F}_1| = |\bar{F}_2|$ och om $\bar{F}_1$ och $\bar{F}_2$ ger samma moment räknat [illegible]



$$|\bar r \times \bar F| = |\bar r|\,|\bar F| \sin\theta$$

$\bar F$:s projektion $\perp \bar r$

$$\bar r \times \bar F = \left[(yF_z - zF_y), (zF_x - xF_z), (xF_y - yF_x) \right]$$

om $\bar r$ och $\bar F$ båda ligger i xy-planet dvs samma z-komp är z och $F_z = 0$

$$\Rightarrow \quad \bar r \times \bar F = (0, 0, (xF_y - yF_x))$$

<u>statiska fallet som vi fördjupar oss i senare:</u>

Godtyckligt antal krafter: jämvikt om $\sum_i \bar F_i = 0$ (ingen translation)

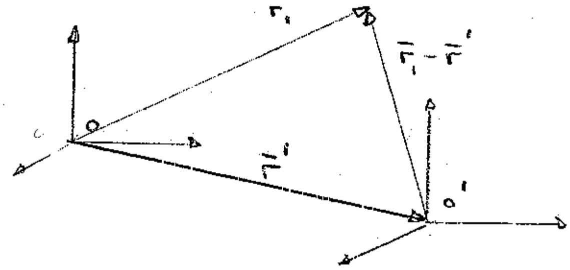
och

$\sum \bar \tau = 0$ (ingen rotation)

Om en kropp är i translatorisk jämvikt ($\sum_i \bar F_i = 0$) och nettomomentet är noll med avseende på någon punkt, så är nettomomentet noll m.a.p vilken annan punkt som helst ty

Moment map O

$$\sum \bar\tau_o = \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \bar r_3 \times \bar F_3 + \ldots$$



Moment map o':

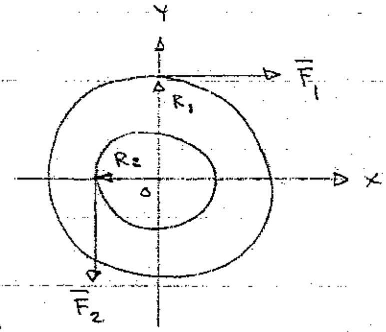
$$\sum \bar\tau_{o'} = (\bar r_1 - \bar r') \times \bar F_1 + (\bar r_2 - \bar r') \times \bar F_2 + (\bar r_3 - \bar r') \times \bar F_3 + \ldots =$$

$$= \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \bar r_3 \times \bar F_3 + \ldots - \bar r' \times \underbrace{(\bar F_1 + \bar F_2 + \bar F_3 + \ldots}_{=0}$$

$$\therefore \quad \sum \bar\tau_o = \sum \bar\tau_{o'}$$

Detta innebär att vi i det statiska fallet (vare sig translation eller rotation) kan välja att räkna ut momentet med avseende på en "beräkningssnål" punkt.

Exempel



$\bar{\tau}_1 = \bar{R}_1 \times \bar{F}_1$ ⊗ längs $-\hat{z}$

⊙ z

$\bar{\tau}_2 = \bar{R}_2 \times \bar{F}_2$ ⊙ längs $+\hat{z}$

$F_1 = 5{,}0\,N$, $R_1 = 1{,}0\,m$

$F_2 = 6{,}0\,N$, $R_2 = 0{,}50\,m$

$$\bar{\tau}_{netto} = \bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2$$

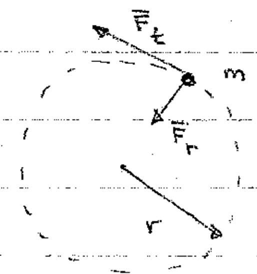
$$|\bar{\tau}_1| = R_1 F_1 \quad , \quad |\bar{\tau}_2| = R_2 F_1$$

$$\bar{\tau}_{netto} = (-R_1 F_1 + R_2 F_2)\,\hat{z} = (-5+3)\,\hat{z} = -2{,}0\,\hat{z}$$

enhet Nm.

$\Rightarrow$ rotation medurs.

Samband mellan moment och vinkelacceleration.



$s = r\theta$

$v = r\omega$

$a_t = r\alpha$

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m a_t$$

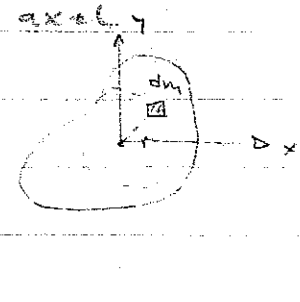
Moment m.a.p. cirkelcentrum:

$$\tau = F_t \cdot r = (m a_t)\, r = (m r \alpha)\, r =$$

$$= m r^2 \alpha = I\alpha$$

$\therefore$ $\boxed{\tau = I\alpha}$ jfr. $F = ma$

Utvidga till stel kropp som roterar kring en fix axel.



$$dF_t = (dm)\, a_t$$

moment på dm: $d\tau = r\, dF_t = r\,dm\, a_t =$

$$= r\,dm\, r\alpha = (r^2 dm)\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{netto} = \int d\tau = \alpha \int r^2\, dm = \alpha I$$

<u>Notera</u> att vi får ett så enkelt uttryck trots att olika delar av kroppen inte upplever samma kraft, lika acceleration eller lika hastighet

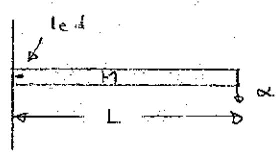
Föreläsning 10

__Rep__ $K_R = \frac{1}{2} I\omega^2$ där $I = \int r^2\,dm$

$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$, $\tau = I\alpha$, $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$

ex 10 11 Bestäm α initialt

moment τ och tröghetsmoment I räknat map leden



$$\left.\begin{array}{l} \text{tyngdpunkten: } \tau = \left(\frac{L}{2}\right) \cdot Mg \\ \text{sedan tidigare } I = \frac{1}{3} ML^2 \end{array}\right\} \quad \tau = I\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{L/2\, Mg}{\frac{1}{3} ML^2} = \frac{3g}{2L}$$

notera: $a_t = R\alpha = L\alpha = \frac{3}{2} g > g$!

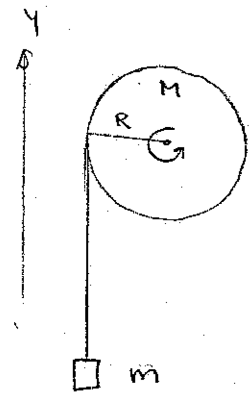
---

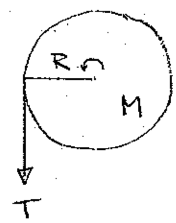
10 12

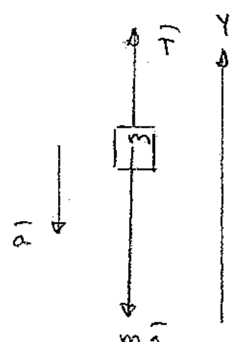
Bestäm: a för massan m

α för hjulet

T i snöret







$$\tau = I\alpha = TR \Rightarrow \alpha = \frac{TR}{I} \quad (1)$$

massan m: $\sum F_y = T - mg = -ma \Rightarrow a = \frac{mg - T}{m}$ (2)

samband mellan a och α: $a = a_{t,R} = R\alpha$

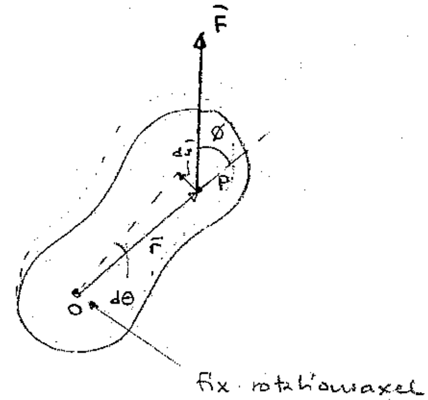
Använd det senare och utnyttja (1) och (2):

$$a = R\alpha = \frac{TR^2}{I} = \frac{mg - T}{m} \quad (3) \Rightarrow T = \frac{mg}{1 + mR^2/I} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{g}{1 + I/mR^2} \\ \alpha = \dfrac{g}{R + I/mR} \end{cases} \qquad I = \frac{1}{2} MR^2$$

Arbete, effekt och energi vid rotationsrörelse

Kraften $\bar{F}$ appliceras i punkten P.



$$dW = \bar{F} \cdot d\bar{s} = (F \cdot \sin\phi)\, r \cdot d\theta \qquad (1)$$

$$ds = r\, d\theta$$

men momentet av $\bar{F}$ map O:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$$

$$\Rightarrow \quad \tau = rF \sin\phi \qquad (2)$$

(1) och (2) ger nu $\quad \underline{dW = \tau\, d\theta}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{P = \text{effekten} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega}$$

Arbete vid rotation $\theta_0 \to \theta$: $\quad W = \int_{\theta_0}^{\theta} \tau\, d\theta$

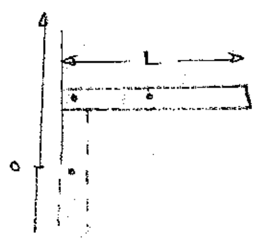
men $\quad \tau = I\alpha = I \frac{d\omega}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = I \frac{d\omega}{d\theta} \cdot \omega$

$\Rightarrow \quad \tau \cdot d\theta = I\omega\, d\omega$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{\omega_0}^{\omega} I\omega\, d\omega = \frac{1}{2} I\omega^2 - \frac{1}{2} I\omega_0^2$$

$$\boxed{\text{arbetet} = \text{ändring av rotationsenergin}}$$

ex 10 15 $\quad \omega$ i vertikalläget



$$I = \frac{1}{3} ML^2$$

horisontalläge (pot en) : $\quad E = U = Mg\frac{L}{2}$

vertikalläge (kin en) : $\quad E = K = \frac{1}{2} I\omega^2$

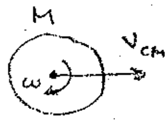
$$U = K \Rightarrow \frac{1}{2} MgL = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\omega^2$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}$$

För en kropp som utför rotations- och translationsrörelse samtidigt har vi

$$K = K_{trans} + K_{rot}$$

rullande sfär ex.

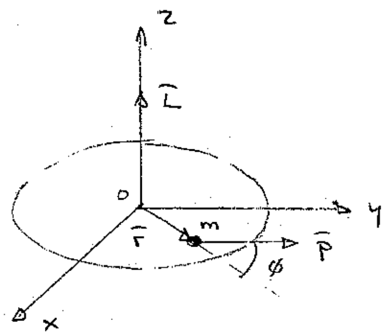


$$K = \frac{1}{2} I_{CM}\,\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$

men $\quad v_{CM} = R\omega \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \dfrac{v_{CM}^2}{R^2}$

$$\Rightarrow K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{CM}}{R^2} + M\right) v_{CM}^2$$

Rörelsemängdsmoment $\bar{L}$:



$$\bar{L} \equiv \bar{r} \times \bar{p}$$

$$|\bar{L}| = rmv \cdot \sin\phi$$

samband mellan $\bar{L}$ och $\bar{\tau}$:

$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\bar{r} \times \bar{p}\right) = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} =$$

$$= \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \underbrace{\bar{v} \times m\bar{v}}_{=0} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

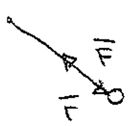
$$\therefore \quad \boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}}$$

Det krävs ett moment för att ändra rörelsemängdsmomentet.

Obs! $\bar{\tau}$ och $\bar{L}$ måste bestämmas map samma origo.

Centralkraft:

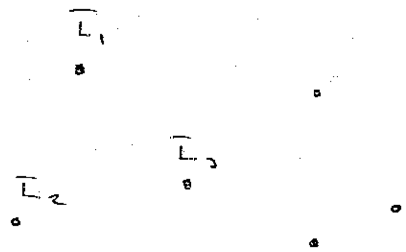
Viktigt specialfall



$\bar{F} \,/\!/\, \bar{r} \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau} = 0$

$\therefore \quad \dfrac{d\bar{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{L} = \text{konst.}$

Flera partiklar

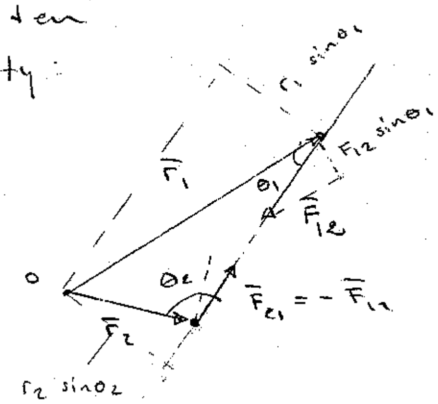


$$\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i$$

$$\sum \bar{\tau}_{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt}$$

Moment orsakade av intern växelverkan orsakar ingen ändring av $\bar{L}$ i tiden

ty:



$\bar{\tau}_{1,int} = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{12}$ ⊗

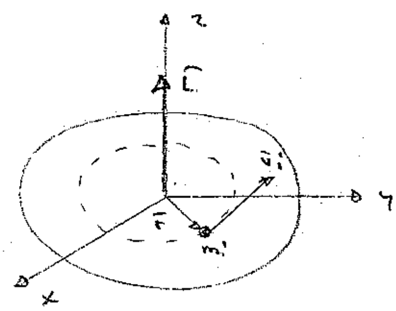
$|\bar{\tau}_{1,int}| = r_1 F_{12} \sin\theta_1$

$\bar{\tau}_{2,int} = \bar{r}_2 \times \bar{F}_{21}$ ⊙

$|\bar{\tau}_{2,int}| = r_2 F_{21} \sin\theta_2$

$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2$ $\qquad \bar{\tau}_{1,int} = -\bar{\tau}_{2,int}$

$\bar{L}$ för roterande stel kropp



enskild partikel: $L_i = m_i r_i^2 \omega$

Totalt

$$L_z = \sum m_i r_i^2 \omega = I \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

$$\boxed{\sum \tau_{ext} = \frac{dL_z}{dt} = I\alpha}$$

Konservering av $\bar{L}$:

För ett system av partiklar som inte utsätts för något externt moment är $\bar{L}$ konstant

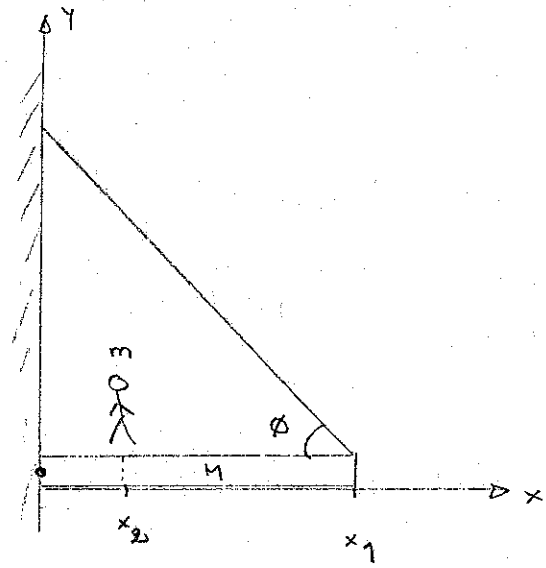
$$\sum \tau_{ext} = \frac{d\bar{L}}{dt} = 0$$

eller

$$I\omega = \text{konstant}$$

Statisk jämvikt

Villkor: $\Sigma \bar{F} = 0$ och $\Sigma \bar{\tau} = 0$

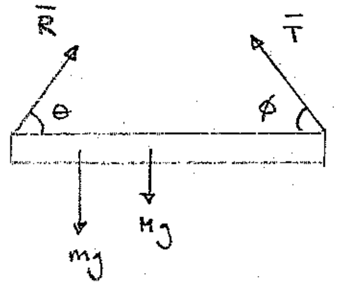


Ex. 12.3

Givet: Sökt: T

$x_1 = 8{,}00$ m
$x_2 = 2{,}00$ m
$Mg = 200$ N
$mg = 600$ N
$\phi = 53{,}0°$

Frilägg:



(1) $\Sigma F_x = R \cos\theta - T \cdot \cos\phi = 0$

(2) $\Sigma F_y = R \cdot \sin\theta + T \cdot \sin\phi - mg - Mg = 0$

R, T och θ obekanta och bara 2 ekv.

momentjämvikt:

moment m.a.p. leden:

(3) $\Sigma \tau_0 = T \cdot \sin\phi \cdot x_1 - mg \cdot x_2 - Mg \cdot \frac{x_1}{2} = 0$

(3) ger $T = \dfrac{mg \cdot x_2 + Mg \frac{x_1}{2}}{\sin\phi \cdot x_1} = \dfrac{600 \cdot 2{,}00 + 200 \cdot 4{,}00}{\sin 53° \cdot 8{,}00}$ N $= \underline{\underline{313 \text{ N}}}$

Insättning i (1) och (2) ger

$R \cdot \cos\theta = 188$ N
$R \cdot \sin\theta = 550$ N

$\Rightarrow \theta = 71{,}1°$, $R = 581$ N

Lutande stege. 12.4

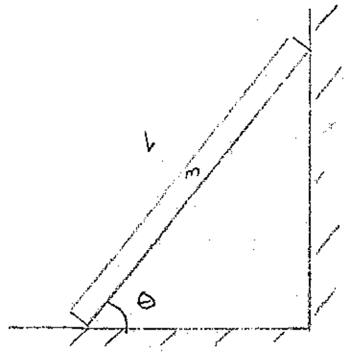
Givet:

$mg = 50N$

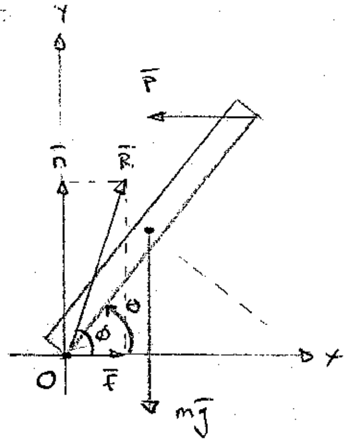
$\mu_s = 0{,}40$

Sökt:

minsta vinkel θ_{min} som stegen kan stå med



Friläggning:



jämvikt

$$\Sigma F_x = f - P = 0 \quad \Rightarrow f = P$$

$$\Sigma F_y = n - mg = 0 \quad \Rightarrow n = mg$$

När stegen är på vippen att glida omkull gäller

$$f = f_{max} = \mu_s n =$$

$$= 0{,}40 \cdot mg = 20N$$

För att komma åt θ_{min} studerar vi momentet med avseende på O:

$$\Sigma \tau_0 = P(l \cdot \sin\theta) - w\left(\frac{l}{2} \cdot \cos\theta\right) = 0$$

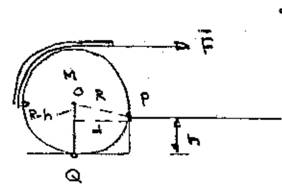
$P = 20N$, $w = 50N$

$$\Rightarrow \quad 20 \cdot \sin\theta_{min} - 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\theta_{min} = 0$$

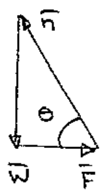
$$\Rightarrow \quad \tan\theta_{min} = \frac{25}{20} \quad \Rightarrow \theta_{min} = 51°$$

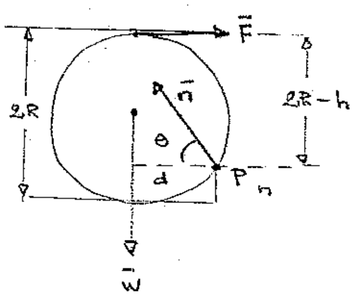
12.5

Bestäm minimala kraften F för att dra cylindern uppför steget samt reaktionskraften vid P



$$d = \sqrt{R^2 - (R-h)^2} = \sqrt{2Rh - h^2}$$





Just när cylindern lyfter är reaktionskraften ($\bar{n}_Q$) vid Q lika med noll.

Moment m.a.p. P:

$$Wd - F(2R-h) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad W\sqrt{2Rh - h^2} - F(2R-h) = 0 \quad \Rightarrow F = \frac{W\sqrt{2Rh - h^2}}{2R-h}$$

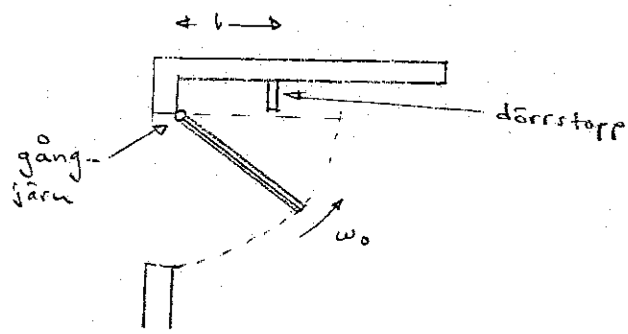
Vidare:

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma F_x = F - n\cos\theta = 0 \\ \Sigma F_y = n\sin\theta - w = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \tan\theta = \frac{W}{F}$$

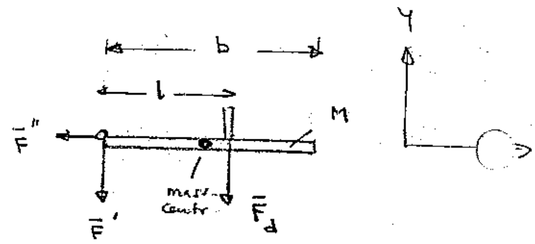
$$n = \sqrt{W^2 + F^2}$$

Dörrstopp.

Var ska dörrstoppen placeras för att påfrestningen på gångjärnen skall bli så liten som möjligt.



Krafter på dörren när den träffar dörrstoppen.



$\bar{F}_d$ = kraft orsakad av dörrstoppen

$\bar{F}''$ = kraft på dörren som möjliggör centripetalaccelerationen

$\bar{F}'$ = kraft på dörren orsakad av gångjärnet

Mål: <u>gör F' så liten som möjligt!</u>

Studera situationen precis före och precis efter kollisionen mellan dörr och dörrstopp.

Utnyttja vad vi vet om rörelsemängdsmomentet hos dörren och rörelsemängden hos masscentrum för dörren och tag fram ett uttryck för F'.

$$dL = \tau \cdot dt \quad \Rightarrow \quad L_f - L_i = \int_{t_i}^{t_f} \tau \cdot dt$$

$$L_i = \omega_0 I \;, \quad L_f = 0 \;, \quad \tau = F_d \cdot l$$

$$\Rightarrow \quad I\omega_0 = l \int F_d \, dt$$

integrationen sker över kollisionstiden

Masscentrum hos dörren lyder sambandet

$$\bar{P}_f - \bar{P}_i = \int \bar{F} \cdot dt \qquad \bar{F} = \text{totala kraften.}$$

$$P_i = M v_y = M \frac{b}{2} \cdot \omega_0$$

$$F_y = -(F_d + F')$$

$$\Rightarrow \quad M \frac{b}{2} \omega_0 = \int (F' + F_d)$$

$$\text{men} \quad \int F_d \, dt = \frac{I\omega_0}{l} \quad \Rightarrow \quad \int F' \, dt = \left(M \frac{b}{2} - \frac{I}{l} \right) \omega_0$$

$$\text{med} \quad M \frac{b}{2} = \frac{I}{l} \quad \text{dvs} \quad l = \frac{2I}{Mb} \quad \text{fås} \quad F' = 0$$

$$I = \frac{1}{3} M b^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\frac{2}{3} M b^2}{Mb} = \underline{\underline{\frac{2}{3} b}}$$

Samma resonemang för brännbollsträ, tennisracket, golfklubba, hammare