Stel kropp i jämvikt:

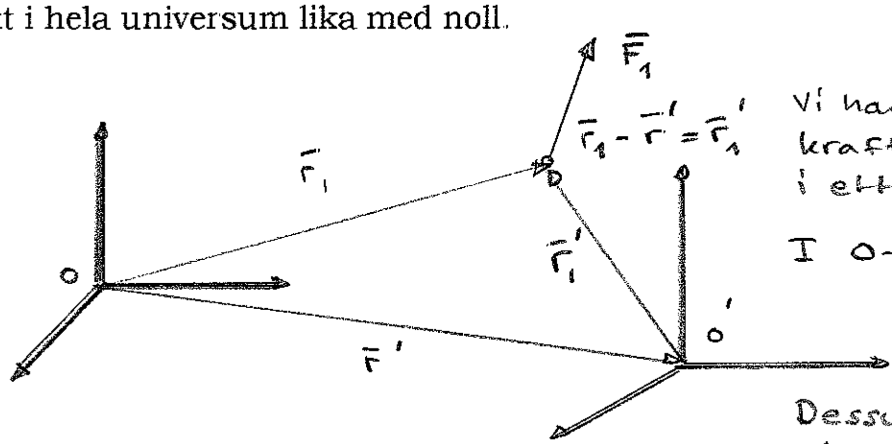
För att en kropp ska befinna sig i jämvikt krävs

$$\Sigma\ \mathbf{F} = 0$$

samt

$$\Sigma\ \tau = 0$$

Vilken punkt ska momentet beräknas med avseende på? Ja, det spelar ingen roll enligt vad vi nu ska visa. Om summan av vridande moment är lika med noll med avseende på någon punkt och samtidigt summan av alla krafter som verkar på kroppen är noll, så är momentet med avseende på varenda punkt i hela universum lika med noll.



Vi har ett antal krafter som verkar i ett antal punkter

I O-systemet gäller

$$\Sigma \bar\tau_O = 0$$

Dessutom vet vi att

$$\Sigma \bar F_i = 0$$

Moment m.a.p. O:

$$\Sigma \bar\tau_O = \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \dots = 0$$

Moment m.a.p. O':

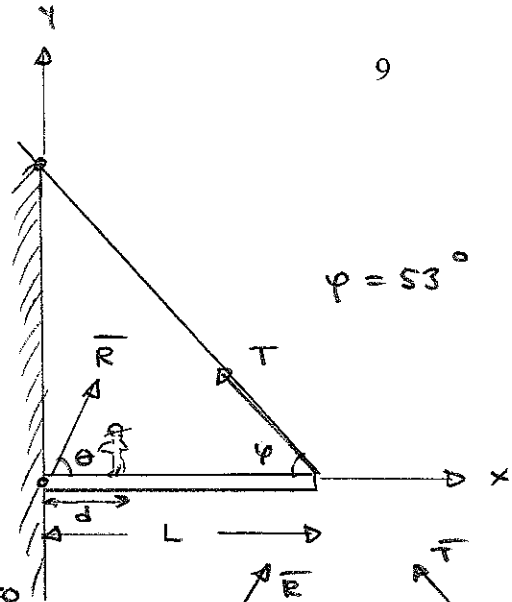
$$\Sigma \bar\tau_{O'} = \bar r_1' \times \bar F_1 + \bar r_2' \times \bar F_2 + \dots =$$

$$= (\bar r_1 - \bar r') \times \bar F_1 + (\bar r_2 - \bar r') \times \bar F_2 + \dots =$$

$$= \bar r_1 \times \bar F_1 + \bar r_2 \times \bar F_2 + \dots - \bar r' \times \underbrace{(\bar F_1 + \bar F_2 + \dots)}_{=0}$$

$$\therefore\ \Sigma \bar\tau_O = \Sigma \bar\tau_O'$$

Valet av koordinatsystem kan göras med hänsyn till hur räkningarna blir enklast.



Exempel 10.8
Horisontell balk

Vila!

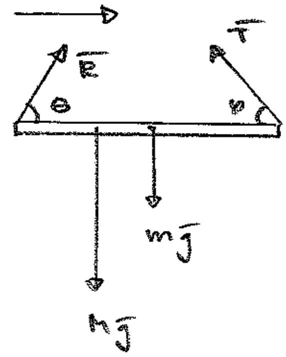
Bestäm $\bar{T}$ och $\bar{R}$!

$\bar{T}$ = spännkraften i wiren

$\bar{R}$ = kraft från väggen på balken.

$m_{balk} \cdot g = mg = 200\,N$

$m_{man}\, g = Mg = 600\,N$



Kraftbalans: $\sum F_x = R\cos\theta - T\cdot\cos\varphi = 0$

$\sum F_y = R\sin\theta + T\sin\varphi - Mg - mg = 0$

Moment m.a.p. fästet i väggen.

$$\sum \tau = (T\cdot\sin\varphi\cdot L) - (Mg\cdot d) - \left(mg\,\frac{L}{2}\right) = 0$$

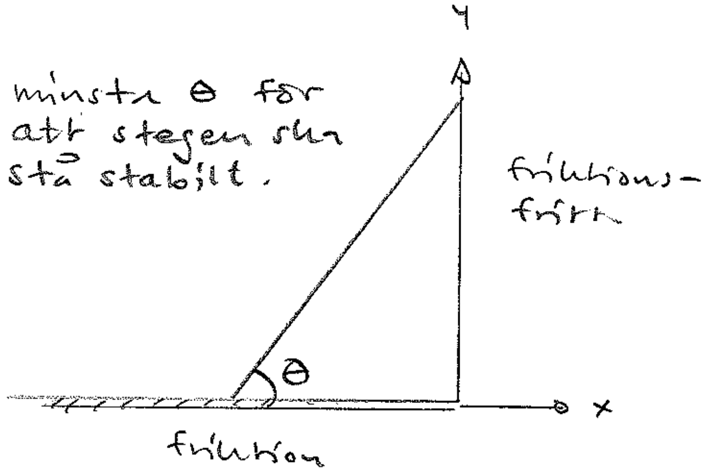
$\Rightarrow T = 313\,N$ Insätt i $\sum F_x$ och $\sum F_y$

$\Rightarrow \theta = 71{,}1°$ och $R = 581\,N$

Exempel 10.9
Lutande stege

Sökt: minsta θ för att stegen ska stå stabilt.

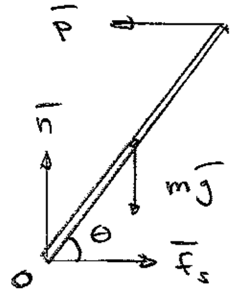
stegens längd = l
dess massa = m



$\sum F_x = f_s - P = 0$

$\sum F_y = n - mg = 0 \Rightarrow n = mg$

$f_{max} = \mu_s n = \mu_s mg = P$



moment m.a.p. O:

$$\sum \tau_0 = Pl\cdot\sin\theta - mg\,\frac{l}{2}\cos\theta = 0$$

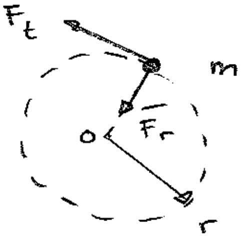
$$\Rightarrow Pl\sin\theta = mg\,\frac{l}{2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{mg\frac{l}{2}}{Pl} = \frac{mg\frac{l}{2}}{\mu_s mg\, l} = \frac{1}{2\mu_s}$$

med $\mu_s = 0{,}40$ fås $\theta = 51°$

Samband mellan vridande moment och vinkelacceleration:

En enda partikel:



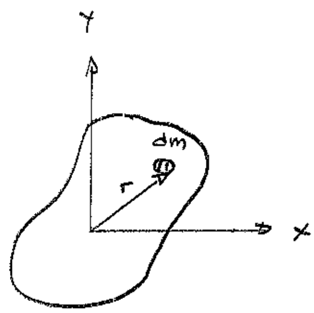
$$s = r\theta$$
$$v_t = r\omega$$
$$a_t = r\alpha$$

$$F_t = m\frac{dv}{dt} = m a_t = m r \alpha$$

$$\tau_o = F_t \cdot r = (m a_t) r = (m r \alpha) r =$$
$$= m r^2 \cdot \alpha = I \alpha$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{\tau = I\alpha}}$$

Utvidgning till en stel kropp:



kraft på det lilla masselementet dm

$$dF_t = dm \cdot a_t$$

moment på dm :

$$d\tau = r \cdot dF_t = r \cdot dm\, a_t =$$
$$= r \cdot dm\, r\alpha = r^2 dm\, \alpha$$

Hela kroppen:

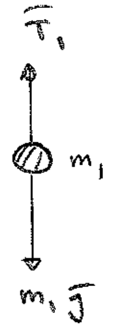
$$\tau_{netto} = \int d\tau = \alpha \int r^2 dm =$$
$$= \alpha I$$

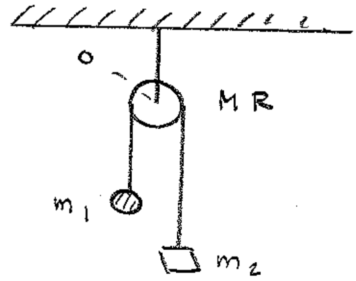
$$\tau_{netto} = \alpha I$$

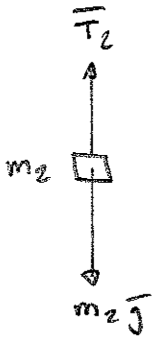
med vektorbeteckningar

$$\boxed{\bar{\tau}_{netto} = \bar{\alpha}\, \bar{I}}$$

Exempel 10.10
Atwoods maskin med en "riktig" trissa.







$$\Sigma F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a$$

$$\Sigma F_y = T_2 - m_2 g = m_2 a$$

här $T_1 \neq T_2$ trissan snurrar   3 obekanta

$$\Sigma \tau_0 = T_1 R - T_2 R = I\alpha = \frac{1}{2} MR^2 \frac{a}{R} = \frac{1}{2} MRa$$

$$\therefore T_1 - T_2 = \frac{1}{2} Ma$$

Nu har vi tre ekvationer

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}\, g$$

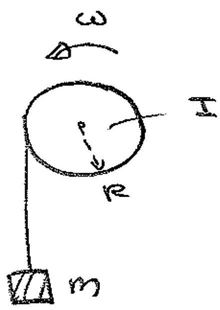
Arbete och energi vid rotation:

Samma resonemang som för partiklar

$$\left.\begin{aligned} dW &= \tau \cdot d\theta \\ \tau &= I\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow dW = I\alpha\, d\theta = I \frac{d\omega}{dt} \cdot d\theta = I \frac{d\theta}{dt} \cdot d\omega =$$

$$= I\omega\, d\omega \qquad \Rightarrow W = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Exempel 10.11
Ett block och trissa



$$v = \omega R$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{v}{R}$$

$$mg\Delta y = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2$$

med $I = \frac{1}{2} MR^2$ för trissan:

$$mg\Delta y = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} MR^2\right)\frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{mg\Delta y}{\frac{1}{2} m + \frac{1}{4} M}$$

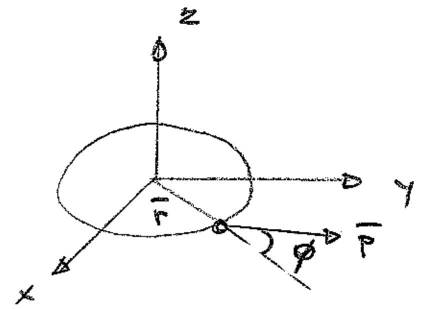
Rörelsemängdsmomentet L:

När vi introducerade begreppet rörelsemäng gjorde vi det för att det hade trevliga egenskaper. Under vissa förhållanden var det en bevarad storhet. När det gäller rotationsrörelser visar det sig att det är mycket praktiskt att införa en ny storhet, rörelsemängsmomentet L.

Detta definieras enligt:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

$$|\bar{L}| = rmv \cdot \sin\phi$$



Samband mellan **L** och τ.

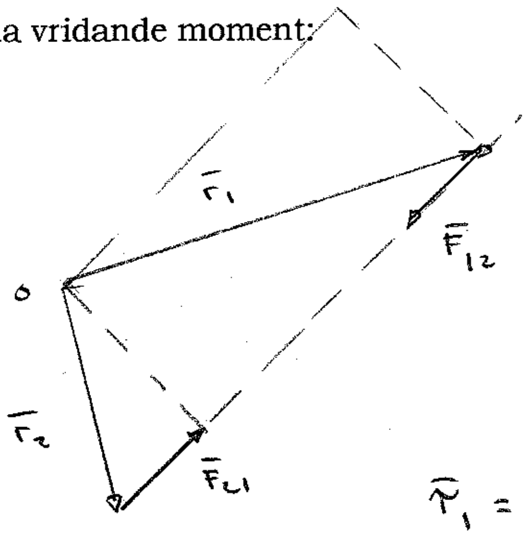
$$\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times \bar{p}) = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \frac{d\bar{r}}{dt} \times \bar{p} =$$

$$= \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} + \underbrace{\bar{v} \times (m\bar{v})}_{=0} = \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt}$$

$$\therefore \quad \boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}}$$

Inverkan av interna vridande moment:



ur figuren

$$|\bar{r}_1 \times \bar{F}_{12}| = |\bar{r}_2 \times \bar{F}_{21}|$$

$$\text{ty } |\bar{F}_{12}| = |\bar{F}_{21}|$$

$$\bar{\tau}_1 = \bar{r}_1 \times \bar{F}_{12}$$

$$\bar{\tau}_2 = \bar{r}_2 \times \bar{F}_{21}$$

$$\bar{\tau}_1 = -\bar{\tau}_2 \quad \text{ty } \bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$$

Detta innebär att moment orsakade av intern växelverkan orsakar inte någon ändring av **L**.

L för en roterande stel kropp:

En enda partikel $L_i = m_i r_i^2 \omega$

Summera över samtliga partiklar

$$L = \Sigma m_i r_i^2 \omega = \omega \Sigma m_i r_i^2 = \omega I$$

$$L = \omega I$$

Konservering av L

<u>För ett system av partiklar som inte utsätts för något externt vridande moment är **L** konstant i tiden.</u>

Detta innebär

$$d\mathbf{L}/dt = 0$$

vilket innebär

$$\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega} = \text{konstant}$$

Lägg märke till att här har skrivit vinkelhastigheten $\boldsymbol{\omega} = 0$ som en vektor. Detta i linje med de konventioner som vi införde när vi introducerade vridande moment.