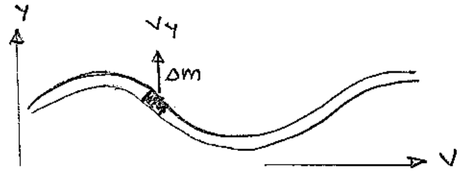
Energitransport i en transversell våg på en sträng:

När vågor propagerar transporteras energi.

Vi ska beräkna hur mycket energi som per tidsenhet, effekten, transporteras i en transversell våg på en sträng. För ett givet medium och en given frekvens visar det sig att effekten och effekten per ytenhet, intensiteten I, är proportionell mot amplituden i kvadrat. Detta kommer att vara grunden för hur stor intensiteten blir om flera vågor överlagras i en och samma punkt. Utan att rodna ska vi använda detta samband för alla typer av vågor, även elektromagnetiska.

Vi antar att vi har en extern störningskälla som åstadkommer den transversella vågen. Vi fokuserar på ett litet strängelement vars längd är Δx och vars massa är Δm.



obs $v_y \neq v$!

ρ = massa/längdenhet

Δm svänger ↕ med farten v_y

$\Delta K = \frac{1}{2} \Delta m \, v_y^2 =$

$= \frac{1}{2} \rho \Delta x \, v_y^2$ låt $\Delta x \to 0$ $\Rightarrow$ $dK = \frac{1}{2} \rho \, dx \, v_y^2$

Harmonisk svängning $y = A \sin(kx - \omega t)$ $\Rightarrow$ $v_y = \frac{dy}{dt} = \omega A \cos(kx - \omega t)$

$\therefore \; dK = \frac{1}{2} \rho \, dx \left[\omega A \cos(kx - \omega t)\right]^2$

Studera fallet $t = 0$ (inget specialfall)

$$\Rightarrow dK = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 kx \, dx$$

Integrera över en våglängd. $K_\lambda = \int_0^\lambda \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cos^2 kx \cdot dx =$

$$= \left[\cos^2 \alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha\right] = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \left[\frac{1}{2} x + \frac{1}{4k} \sin 2kx\right]_0^\lambda =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \left(\frac{1}{2} \lambda\right) = \underline{\frac{1}{4} \rho \omega^2 A^2 \lambda}$$

Den potentiella energin, integrerad över en våglängd U_λ, är lika stor

$$\Rightarrow E_\lambda = K_\lambda + U_\lambda = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cdot \lambda$$

Denna energimängd passerar genom en given punkt under en period

$$\Rightarrow \frac{E_\lambda}{T} = (\text{energi/tidsenhet}) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \frac{\lambda}{T} =$$

$$= \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 (\lambda f) = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \cdot v$$

$$\Rightarrow P = \text{effekten} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v \cdot A^2$$

$$\therefore \; P \sim A^2$$

Ex 13.6

Sträng: $\mu = 5{,}00 \cdot 10^{-2}$ kg/m $\quad f = 60{,}0$ Hz $= \omega = 2\pi \cdot 60{,}0$ rad/s

$T = 80{,}0$ N $\quad A = 6{,}00 \cdot 10^{-2}$ m

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{80{,}0}{5{,}00 \cdot 10^{-2}}} = 40 \text{ m/s} \qquad P = \frac{1}{2}\mu\omega^2 A^2 \cdot v = \underline{512 \text{ W}}$$

Ljudvågor:

Ljudvågor i luft är longitudinella störningar av lufttrycket. Roten till variationen av lufttrycket är förtätningar och förtunningar av luftmolekyltätheten, vilken orsakas av förskjutningar luftmolekylernas jämviktslägen enligt:

$$s(x,t) = s_{max} \sin(kx - \omega t)$$

Detta leder till en lufttrycksvariation enligt:

$$\Delta P = \Delta P_{max} \cos(kx - \omega t)$$

Storheten ΔP_{max} kallas tryckamplituden.

Tryckamplituden är relaterad till amplituden för partikelförskjutningen enligt

$$\Delta P_{max} = \rho v \omega s_{max}$$

Lägg också märke till att tryckvågen är fasförskjuten 90 grader i förhållande till förskjutningsvågen. Partikeltätheten, och därmed trycket, är som störst i förskjutningsfunktionens nollställen.

Ljudhastigheten i luft är temperaturberoende och kan skrivas:

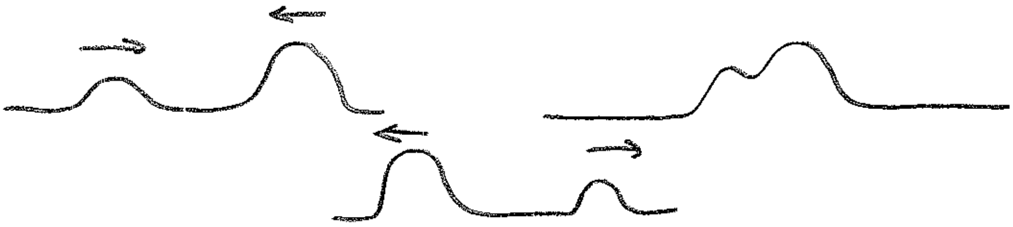
$$v = 331 \text{ m/s} + (0{,}6 \text{ m/s} \cdot {}^\circ\text{C}) \cdot t_c$$

Dopplereffekt och seismiska vågor är intressanta fenomen men igår inte i kursen. Läs själva!

Superposition och stående vågor.

Superpositionsprincipen:

Om två fortskridande vågor färdas genom ett medium och samverkar i en given punkt ges den resulterande störningen av summan av de individuella störningarna.



Vågor som lyder under superpositionsprincipen kallas linjära vågor. Vågor som inte lyder under den kallas icke-linjära vågor och behandlas i icke-linjär vågrörelselära. Icke-linjär optik, som ofta har laseralstrat ljus som ingrediens, är ett exempel på denna gren av vågrörelseläran.

Interferens:

Vi ska använda superpositionsprincipen för att studera vad som händer när två vågor verkar i samma punkt.

Vi antar att båda vågorna färdas från vänster till höger på en x-axel och att de har en fasskillnad Φ. $y_1 = A\sin(kx-\omega t) \quad y_2 = A\sin(kx-\omega t+\phi)$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = A\left[\sin(kx-\omega t) + \sin(kx-\omega t+\phi)\right] =$$

$$\left[\sin a + \sin b = 2\cos\frac{a-b}{2}\sin\frac{a+b}{2}\right] =$$

$$= 2A\cos\frac{\phi}{2}\sin\left(kx-\omega t+\frac{\phi}{2}\right)$$

m = heltal: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$

Konstruktiv interferens: $\frac{\phi}{2} = m\pi \Rightarrow \phi = 2m\pi =$

$= 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots$

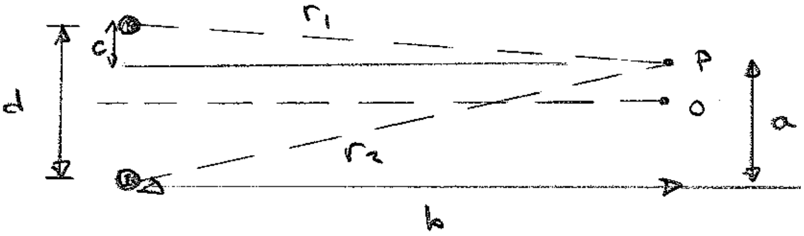
Destruktiv interferens: $\frac{\phi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi = (2m+1)\pi$

$= \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$

Exempel 14.1
Två högtalare som drivs av samma källa

$d = 3{,}00\ \text{m} \quad b = 8{,}00\ \text{m}$

$OP = 0{,}350\ \text{m}$, 1:a min i P



$r_1 = \sqrt{b^2 + c^2} = 8{,}08\ \text{m}$

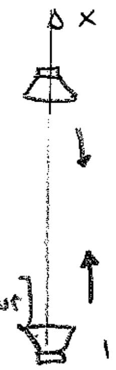
$r_2 = \sqrt{b^2 + a^2} = 8{,}21\ \text{m}$

Vägskillnad $= r_2 - r_1 = 0{,}13\ \text{m}$ max i O, min i P

$\Rightarrow \lambda = 2 \cdot 0{,}13 = 2(r_2 - r_1) = 0{,}26\ \text{m}$

$f = \dfrac{v}{\lambda} = \dfrac{343}{0{,}26} = 1{,}3\ \text{kHz}$

<u>Stående vågor:</u>



Vi studerar vad som händer när två högtalare skickar ut ljudvågor som är riktade mot varandra. Vågorna har för enkelhets skull samma amplitud, våglängd och frekvens. $y_1 = A \cdot \sin(kx - \omega t) \quad y_2 = A \sin(kx + \omega t)$

$y = y_1 + y_2 = [\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b] =$

$= A[\sin kx \cdot \cos\omega t - \cos kx \sin\omega t + \sin kx \cos\omega t + \cos kx \sin\omega t] =$

$= \underbrace{(2A \cdot \sin kx)}_{\text{lägesberoende amplitud}} \cos\omega t$

Vi ser att den funktion som beskriver störningen består av två faktorer; en funktion som bara innehåller läget som variabel och en som bara innehåller tiden som variabel.
Om en av dessa funktioner är lika med noll blir störningen noll. Speciellt intressant är det fall när den funktion som innehåller läget, 2A cos kx, är lika med noll så är störningen lika med noll för alla tider. Det finns också punkter där denna funktion har värdet 2A.

De senare x-punkterna kallas <u>bukar</u> (engelska antinodes) och de förra kallas noder (engelska nodes).

För bukarna gäller: $kx = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$ dvs $\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \frac{5\lambda}{4}$

$x = (2n+1)\frac{\lambda}{4} \quad n = 0, 1, \ldots$

Lägg märke till att avståndet mellan två bukar är λ/2.

För noderna gäller: $kx = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} x = 0, \pi, 2\pi \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}$

Avståndet mellan två noder är också det λ/2. $x = n\frac{\lambda}{2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

Exempel 14.2
Stående våg

$y_1 = A\sin(kx - \omega t)$ $\quad y_2 = A\cdot\sin(kx+\omega t)$

$A = 4{,}0\text{ cm} \quad k = 3{,}0\text{ cm}^{-1} \quad \omega = 2{,}0\text{ rad/s}^{-1}$

$y = 2A\cdot\sin kx\cdot\cos\omega t = 2\cdot 4{,}0\cdot\sin 3{,}0x\cdot\cos 2{,}0t$

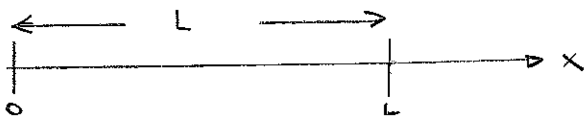
Sökt: amplitud vid $x = 2{,}3$ cm

$y_{max} = 8{,}0\text{ cm}\cdot\sin(3{,}0\cdot 2{,}3 \text{ rad}) = \underline{4{,}6\text{ cm}}$

Noder och bukar: $k = \frac{2\pi}{\lambda} = 3{,}0\text{ cm}^{-1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{3}\text{ cm}$

buklägen: $x = (2n+1)\frac{2\pi}{12}$ cm $\quad$ nodlägen: $x = n\frac{\lambda}{2} = n\frac{2\pi}{6}$ cm

Stående vågor på en sträng:



För en stående våg gäller allmänt

$y = (2A\cdot\sin kx)\cdot\cos\omega t$

$x=0$ ger alltid en nod oavsett värdet på k (eller λ)

Nu har vi satt fast strängen vid $x=L$ också.

$\Rightarrow y(x=L,t)=0 \Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi \Rightarrow k = n\frac{\pi}{L}$

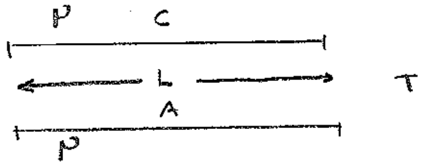
Nu kommer bara "rätt" våglängder att "trivas" på strängen.

$k = n\frac{\pi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad n = 1,2,3,\ldots$

$f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ = grundtonen $\quad f_2 = \frac{2}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$ = 1:a övertonen

λ_1 grundtonen $\quad \lambda_2$ 1:a övertonen $\quad \lambda_3$ 2:a övertonen

Exempel 14.3
"Ge mig ett C"



$f_{1C} = 262\ \text{Hz}$

$f_{1A} = 440\ \text{Hz}$

(A) sökt: f_{2C} och f_{3C} $f_{2C} = 2\cdot f_{1C} = \underline{\underline{524\ \text{Hz}}} \Rightarrow f_{3C} = \underline{\underline{786\ \text{Hz}}}$

(B) sökt: T_A/T_C med samma ρ på strängarna.

$$f_n = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \Rightarrow f_{1A} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_A}{\rho}} \quad f_{1C} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T_C}{\rho}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{f_{1A}}{f_{1C}}\right)^2 = \underline{\underline{2{,}8}}$$

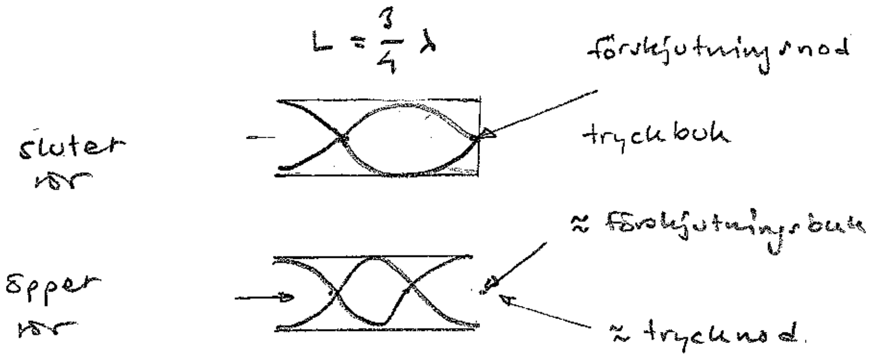
(C) med $L_A = 0{,}64\, L_C$

$$f_{1A} = \frac{1}{2L_A}\sqrt{\frac{T_A}{\rho}} \quad f_{C1} = \frac{1}{2L_C}\sqrt{\frac{T_C}{\rho}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_C} = \left(\frac{L_A f_{1A}}{L_C f_{1C}}\right)^2 = 0{,}64^2\left(\frac{440}{262}\right)^2 = \underline{\underline{1{,}16}}$$

Stående vågor i en luftfyllt rör:

öppen ände: förskj. nod

Sluten ände: —"— buk.

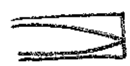


Rör öppet i båda ändarna: $f_n = n\frac{v}{2L}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$

$L = n\cdot\frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n} \rightarrow$

$\Rightarrow f_1,\ 2f_1,\ 3f_1,\ \ldots$

Med ena änden sluten:



$$L = (2n-1)\frac{\lambda}{4} \Rightarrow \lambda = \frac{4L}{2n-1} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\Rightarrow f_n = \frac{v}{\lambda} = (2n-1)\frac{v}{4L}$$

$$\therefore\ f_1 = \frac{v}{4L} \quad f_2 = 3\frac{v}{4L} \quad f_3 = 5\frac{v}{4L}$$

$$\Rightarrow f_1,\ 3f_1,\ 5f_1 \ldots$$

<u>Svävningar</u> (engelska: beats):

När vi har överlagrat vågor med samma frekvens upptäckte vi att den resulterande störningen beror av den punkt som vi studerade störningen i.

Vad händer om vi överlagrar tonerna från två stämgafflar, vars grundtoner skiljer sig åt lite grand? $y_1 = A\cos(k_1x - \omega_1 t)$ $y_2 = A\cos(k_2x - \omega_2 t)$

Vi studerar den totala störningen i $x = 0$

För $x = 0$ gäller $y_1 = A\cdot\cos(-\omega_1 t) = A\cdot\cos\omega_1 t = A\cos(2\pi f_1 t)$

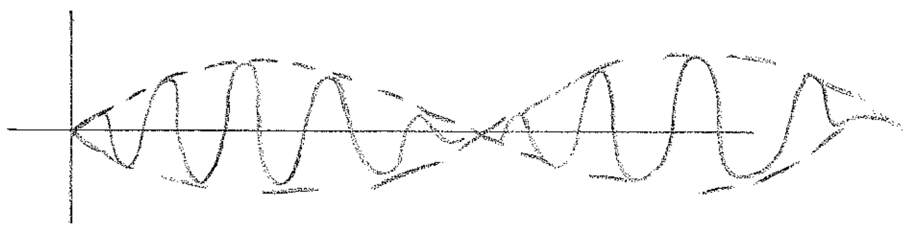
$y_2 = A\cdot\cos(-\omega_2 t) = A\cdot\cos\omega_2 t = A\cdot\cos(2\pi f_2 t)$

$$\Rightarrow y = y_1 + y_2 = A\left[\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t)\right]$$

men $\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$

Med $a = 2\pi f_1 t$ och $b = 2\pi f_2 t$ får vi:

$$y = \underbrace{2A\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)t\right]}_{\substack{\text{relativt långsamt}\\ \text{varierande funktion}\\ A_{x=0}}}\cdot\underbrace{\cos\left[2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right]}_{\substack{\text{relativt snabbt}\\ \text{varierande funktion}}}$$



Den snabba funktionen har stor amplitud 2 gånger under den långsamma funktionens period.

Örat uppfattar att tonen $\frac{f_1+f_2}{2}$ har maximum med en frekvens som är $2\cdot\left(\frac{f_1-f_2}{2}\right)$ Egentligen $2\frac{|f_1-f_2|}{2}$

$|f_1 - f_2|$ kallas svävningsfrekvensen.

(beat frequency)