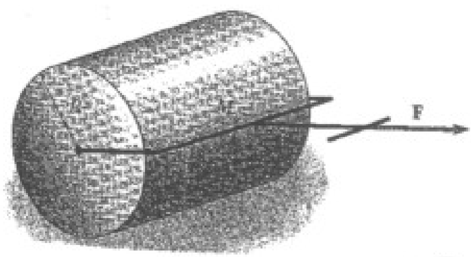
A constant horizontal force **F** is applied to a lawn roller i the form of a uniform solid cylinder of radius R and ma M (Fig P10.78) If the roller rolls without slipping on th horizontal surface, show that (a) the acceleration of th center of mass is $2\mathbf{F}/3M$ and (b) the minimum coefficien of friction necessary to prevent slipping is $F/3Mg$. (*Hin* Take the torque with respect to the center of mass.)

10.78



Homogen cylinder:

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

a) Tyngdpunktens acceleration:

ges av summan av externa krafter dvs $\bar{F} + \bar{f}$

$$F - f = M \cdot a_{CM}$$

men friktionskraften f möjliggör rotationsrörelsen:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= I \cdot \alpha \\ \tau &= f R \\ \alpha &= \frac{a_{CM}}{R} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f = \frac{\tau}{R} = \frac{I\alpha}{R} = \frac{I a_{CM}}{R^2} = \frac{\frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{CM}}{R^2} = \frac{1}{2} M a_{CM}$$

$$\therefore \; F - f = F - \frac{1}{2} M a_{CM} = M a_{CM} \Rightarrow F = \frac{3}{2} M a_{CM}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{CM} = \frac{2F}{3M}} \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{2F}{3MR}$$

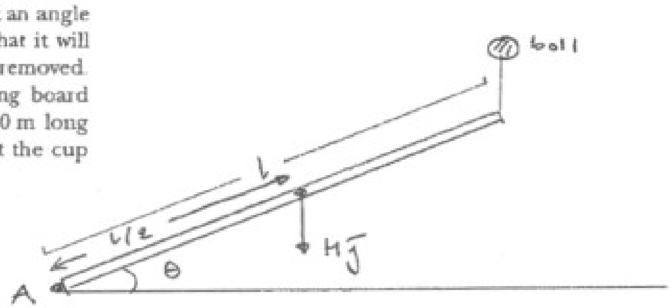
b)

$$\left.\begin{aligned} f_{max} &= \mu_s M g \\ f_{max} R &= I\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mu_s \cancel{M} g \cancel{R} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{M} R^2 \frac{\cancel{2} F}{3 M \cancel{R}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{F}{3Mg}}$$

A common demonstration, illustrated in Figure P10.72, consists of a ball resting at one end of a uniform board of length ℓ, hinged at the other end, and elevated at an angle θ. A light cup is attached to the board at r_c so that it will catch the ball when the support stick is suddenly removed. (a) Show that the ball will lag behind the falling board when θ is less than 35.3°. (b) If the board is 1.00 m long and is supported at this limiting angle, show that the cup must be 18.4 cm from the moving end.

10.72



Hur stor får θ högst vara för att bollen ska falla långsammare än änden på plankan?

Vridande moment m.a.p. A : $\tau_A = Mg\,\frac{l}{2}\cdot\cos\theta$

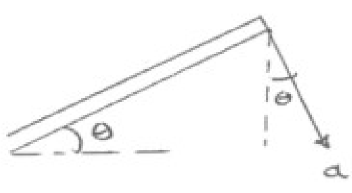
Plankans tröghetsmoment m.a.p. A : $I_A = \frac{1}{3}Ml^2$

$$\tau_A = I_A\cdot\alpha$$

$$\Rightarrow \cancel{M}g\,\frac{\cancel{l}}{2}\cos\theta = \frac{1}{3}M l^{\cancel{2}}\cdot\alpha \quad\Rightarrow\quad \alpha = \frac{3}{2}\,\frac{\cos\theta}{l}\,g$$

$$\Rightarrow\quad a = \frac{3}{2}\cos\theta\cdot g$$

men plankänden rör sig inte rakt mot marken



Det gäller att $a\cdot\cos\theta > g$ för att plankan ska hinna före bollen

$$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\cos\theta\cdot g\right)\cdot\cos\theta > g$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta > \frac{2}{3} \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{\theta < 35{,}26^\circ}}$$

10.49

A puck of mass 80.0 g and radius 4.00 cm slides along an air table at a speed of 1.50 m/s as shown in Figure P11.34a. It makes a glancing collision with a second puck of radius 6.00 cm and mass 120 g (initially at rest) such that their rims just touch. Because their rims are coated with instant-acting glue, the pucks stick together and spin after the collision (Fig. P11.34b). (a) What is the angular momentum of the system relative to the center of mass? (b) What is the angular speed about the center of mass?

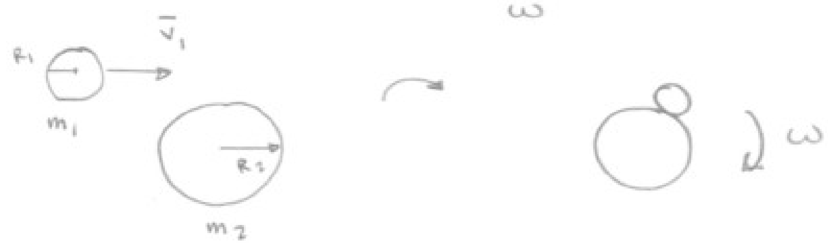
~~10.34~~ ①

Givet: $m_1 = 80{,}0\,g$ $R_1 = 4{,}00\,cm$ $v_1 = 1{,}50\,m/s$

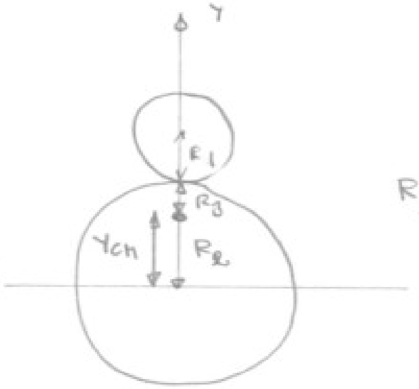
$m_2 = 120\,g$ $R_2 = 6{,}00\,cm$

Sökt: L relativt masscentrum hos

ω



a) Bestäm masscentrum för det sammanslagna systemet.



$$\bar{Y}_{CM} = \frac{m_1(R_2 + R_1) + 0}{m_1 + m_2}\hat{Y} =$$

$$= \frac{80{,}0\,(0{,}06 + 0{,}04)}{80 + 120}\hat{Y} = 0{,}04$$

$$= \underline{\underline{4\,cm}}$$

$R_2 - Y_{CM} = R_3$

$R_3 = 2{,}00\,cm$

b) L map $\bar{Y}_{CM}$

Omedelbart före kollision: $V_{stor} = 0$

$$\bar{L}_i = +m_1 v_1 (R_1 + R_3)\,\hat{z} = +0{,}080 \cdot 1{,}5\,(4{,}00 + 2{,}00)\,\hat{z} =$$

$$\underline{\underline{= +7{,}20 \cdot 10^{-3}\,\hat{z}\,kgm/s}}$$

c) ω: L bevaras $L_f = I_1\omega + I_2\omega$

I_1 = tröghetsmomentet m.a.p. $\bar{Y}_{CM}$ (liten)

I_2 = —— " —— (stor)

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + m_1(R_1 + R_3)^2 = \frac{1}{2}0{,}080 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}080\,(0{,}04 + 0{,}02)^2 =$$

$$= 3{,}52 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2Y_{CM}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}0{,}120 \cdot 0{,}06^2 + 0{,}120 \cdot 0{,}04^2 = 4{,}08 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 = \underline{\underline{7{,}60\,kgm^2}}$$

10.49

~~10.34~~

forts.

$$L_i = L_f = I_{tot} \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{L_i}{I_{tot}} = \frac{7{,}20 \cdot 10^{-3}}{7{,}60 \cdot 10^{-4}} \text{ rad/s} =$$

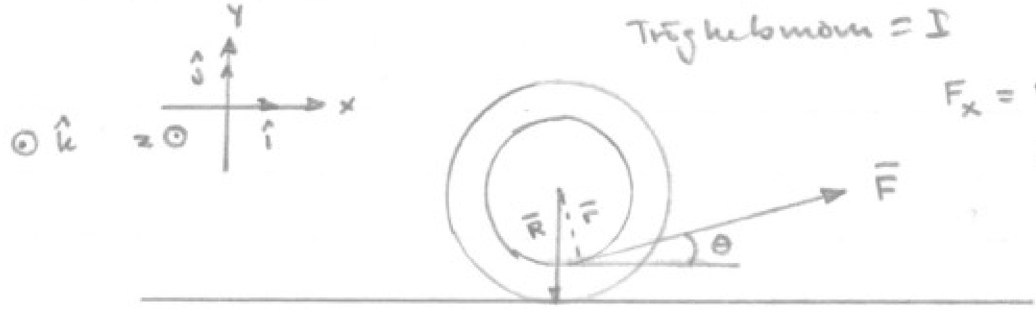
$$= \underline{\underline{9{,}47 \text{ rad/s}}}$$

Trådrullen : Åt vilket håll rullar den ?

Tröghetsmom = I

$F_x = F\cos\theta$

$F > 0$



Förutom $\bar{F}$ påverkar friktionskraften mot underlaget $\bar{f}$ trådrullens färd. Vi vet inte åt vilket håll friktionen är riktad och avstår från att rita ut den i figuren ovan. Vi skriver bara : $\bar{f} = f\,\hat{i}$
($f>0$ innebär $\xrightarrow{\bar{f}}$, $f<0$ innebär $\xleftarrow{\bar{f}}$)

Tyngdpunktens acceleration (som är riktad längs $\hat{i}$ eller $-\hat{i}$) kan skrivas :

$$F\cos\theta\,\hat{i} + f\,\hat{i} = M a_{CM}\,\hat{i}$$

Bestäm tecknet på a_{CM} !

$$\Rightarrow \boxed{F\cos\theta + f = M a_{CM}} \quad (1)$$

$a_{CM} > 0$: $\xrightarrow{\text{rull åt hö}}$

$a_{CM} < 0$: $\xleftarrow{\text{rull åt vä}}$

Vridande moment :

$$\bar{\tau}_F + \bar{\tau}_f = \bar{r}\times\bar{F} + \bar{R}\times\bar{f} = I\cdot\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad rF(+\hat{k}) + Rf(+\hat{k}) = I\cdot\alpha\,\hat{k}$$

Vi vet att $\bar{F}$ ger ett vridande moment som vill rotera trådrullen moturs ∴ $\bar{\tau}_F \parallel \hat{k}$
Om $f>0$ så vill även den rotera moturs ∴ $\bar{\tau}_f \parallel \hat{k}$
Om $f<0$ vill den kraften rotera medurs ∴ $\bar{\tau}_f \parallel (-\hat{k})$
Medursrotation : $\alpha < 0$,
Vi har alltså :

$$\boxed{rF + Rf = I\alpha} \quad (2)$$

Vi kan nu eliminera den okända friktionskraften och på så sätt ta reda på a_{CM}:s tecken.

Vi noterar att a_{CM} och α har motsatta tecken.

Rullning medurs ↻ : $a_{CM} > 0$, $\alpha < 0$

Rullning moturs ↺ : $a_{CM} < 0$, $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \quad a_{CM} = -R \cdot \alpha \quad \text{eller} \quad \alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$$

Detta sätts in i ekv.(2) och vi får

$$\left.\begin{aligned} F\cos\theta + f &= M a_{CM} \\ rF + Rf &= -\frac{I}{R} a_{CM} \end{aligned}\right\}$$

Mult. den övre ekv. med $-R$

$$\left.\begin{aligned} -RF\cos\theta - Rf &= -MR\, a_{CM} \\ rF \qquad + Rf &= -\frac{I}{R} a_{CM} \end{aligned}\right\}$$

Addera vänsterleden och addera högerleden

$$\Rightarrow \quad rF - RF\cos\theta = \left(-MR - \frac{I}{R}\right) a_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{1}{MR + \frac{I}{R}} (R\cos\theta - r)\, F$$

Tecknet på a_{CM} avgörs av tecknet på $R\cos\theta - r = R\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$

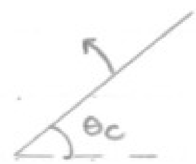
Notera att vi vet att samtliga av storheterna F, I, r, R är positiva. Det enda okända tecknet är f:s.

$\vec{a}_{CM} > 0$ om $\cos\theta > \frac{r}{R}$

$\overleftarrow{a}_{CM} < 0$ om $\cos\theta < \frac{r}{R}$

Sifferexempel: $R = 3$ cm $r = 2$ cm
ger gränsvinkeln θ_c

$$\theta_c = \arccos\frac{2}{3} = 48^\circ$$



vinklar mellan tråden och horisontalplanet $> 48^\circ$ ger $a_{CM} \le 0$ dvs rullning åt vänster. $\theta < 48^\circ$ rulln. åt höger.

Åt vilket håll är $\bar{f}$ riktad?

i) Rullning åt höger:

$\bar{F}$ vill ju åstadkomma rullning åt vänster
så $\bar{f}$ måste vara riktad åt vänster
för att nettomomentet ska åstadkomma rullning åt hö

ii) Rullning åt vänster:

$\bar{F}$ verkar åt höger med $F\cos\theta$.
Tyngdpunkten accelereras åt vänster
⇒ Nettokraften måste vara riktad åt vänster
∴ $\bar{f}$ är riktad åt vänster då också.