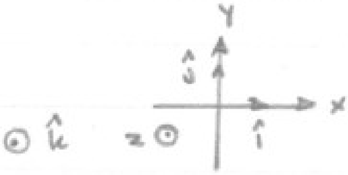
Trådrullen: Åt vilket håll rullar den?



Tröghetsmom = I

$F_x = F\cos\theta$

$F > 0$

Förutom $\bar{F}$ påverkar friktionskraften mot underlaget $\bar{f}$ trådrullens färd. Vi vet inte åt vilket håll friktionen är riktad och avstår från att rita ut den i figuren ovan. Vi skriver bara: $\bar{f} = f\,\hat{i}$
($f>0$ innebär $\xrightarrow{\bar{f}}$, $f<0$ innebär $\bar{f} \longleftarrow$)

Tyngdpunktens acceleration (som är riktad längs $\hat{i}$ eller $-\hat{i}$) kan skrivas:

$$F\cos\theta\,\hat{i} + f\,\hat{i} = M a_{CM}\,\hat{i}$$

Bestäm tecknet på a_{CM}!

$$\Rightarrow \boxed{F\cos\theta + f = M a_{CM}} \quad (1)$$

$a_{CM} > 0$: $\xrightarrow{\text{rull åt hö}}$

$a_{CM} < 0$: $\xleftarrow[\text{rull åt vä}]{}$

Vridande moment:

$$\bar{\tau}_F + \bar{\tau}_f = \bar{r}\times\bar{F} + \bar{R}\times\bar{f} = I\cdot\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad rF(+\hat{k}) + Rf(+\hat{k}) = I\cdot\alpha\,\hat{k}$$

Vi vet att $\bar{F}$ ger ett vridande moment som vill rotera trådrullen moturs : $\bar{\tau}_F \parallel \hat{k}$
Om $f>0$ så vill även den rotera moturs : $\bar{\tau}_f \parallel \hat{k}$
Om $f<0$ vill den kraften rotera medurs : $\bar{\tau}_f \parallel (-\hat{k})$
Medursrotation : $\alpha < 0$,
Vi har alltså :

$$\boxed{rF + Rf = I\alpha} \quad (2)$$

Vi kan nu eliminera den okända friktionskraften och på så sätt ta reda på a_{CM}:s tecken.

Vi noterar att a_{CM} och α har motsatta tecken.

Rullning medurs ↻ : $a_{CM} > 0$, $\alpha < 0$
Rullning moturs ↺ : $a_{CM} < 0$, $\alpha > 0$

$$\Rightarrow \quad a_{CM} = -R \cdot \alpha \quad \text{eller} \quad \alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$$

Detta sätts in i ekv. (2) och vi får

$$\left.\begin{aligned} F\cos\theta + f &= M a_{CM} \\ rF + Rf &= -\frac{I}{R} a_{CM} \end{aligned}\right\}$$

Mult. den övre ekv. med $-R$

$$\left.\begin{aligned} -RF\cos\theta - Rf &= -MR\, a_{CM} \\ rF \qquad\qquad + Rf &= -\frac{I}{R} a_{CM} \end{aligned}\right\}$$

Addera vänsterleden och adder högerleden

$$\Rightarrow \quad rF - RF\cos\theta = \left(-MR - \frac{I}{R}\right) a_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad a_{CM} = \frac{1}{MR + \frac{I}{R}} (R\cos\theta - r) F$$

Tecknet på a_{CM} avgörs av tecknet på
$R\cos\theta - r = R\left(\cos\theta - \frac{r}{R}\right)$

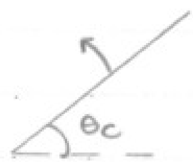
Notera att vi vet att samtliga av storheterna F, I, r, R är positiva. Det enda okända tecknet är f:s.

$\vec{a}_{CM} > 0$ om $\cos\theta > \frac{r}{R}$

$\overleftarrow{a}_{CM} < 0$ om $\cos\theta < \frac{r}{R}$

Sifferexempel: $R = 3$ cm $r = 2$ cm
ger gränsvinkeln θ_c

$$\theta_c = \arccos\frac{2}{3} = 48^\circ$$



vinklar mellan tråden och horisontalplanet $> 48^\circ$ ger $a_{CM} < 0$ dvs rullning åt vänster. $\theta < 48^\circ$ rulln. åt höger.

Åt vilket håll är $\bar{f}$ riktad?

i) Rullning åt höger:

$\bar{F}$ vill ju åstadkomma rullning åt vänster
så $\bar{f}$ måste vara riktad åt vänster
för att nettomomentet ska åstadkomma
rullning åt hö

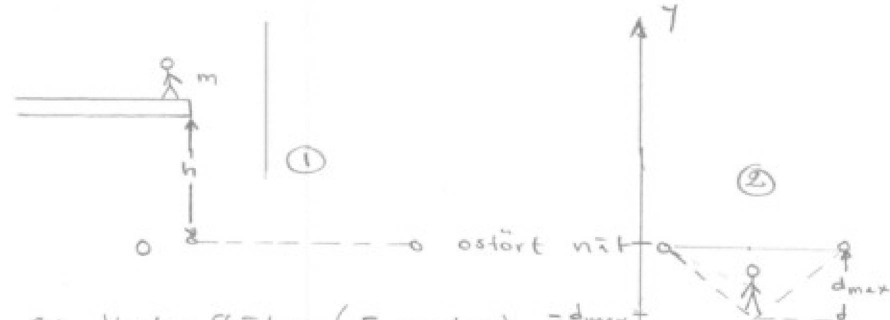
ii) Rullning åt vänster:

$\bar{F}$ verkar åt höger med $F\cos\theta$.
Tyngdpunkten accelereras åt vänster
⇒ Nettokraften måste vara riktad åt vänster
∴ $\bar{f}$ är riktad åt vänster då också.

4:37

Trapetsakrobater avslutar ofta sina nummer genom att hoppa från trapetsen ner i ett säkerhetsnät. När akrobaten står i vila i nätets mittpunkt trycks denna ner sträckan d_1. Man kan anta att nedtryckningen är proportionell mot den kraft varmed akrobaten påverkar nätet. Hur stor blir den största nedtryckningen, om akrobaten hoppar från höjden h över nätet?

Lösning:



Vi betraktar nätet som en Hook-fjäder ($F_{fj} = -ky$)

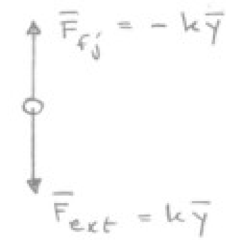
Den potentiella energin i gravitationsfältet sätts exempelvis i nivå med det ostörda nätet.

Genom att betrakta nätet som en ideal fjäder kan vi utgå ifrån att den mekaniska energin bevaras.

① $E_{tot} = mgh$

arbete vid uttänjn. av nätet. ($0 \to -d_{max}$)
utr. av $F_{ext} = mg = -F_{fj}$

② $E_{tot} = -mg\,d_{max} + W$



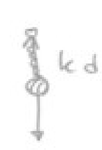
$$W = \int_0^{-d_{max}} k\bar{y}\cdot d\bar{y} = \int_0^{-d_{max}} ky\hat{y}\cdot dy\hat{y} = \int_0^{-d_{max}} ky\cdot dy =$$

$$= \left[\frac{1}{2}ky^2\right]_0^{-d_{max}} = \frac{1}{2}k\,d_{max}^2$$

$$\Rightarrow E_{tot} = -mg\,d_{max} + \frac{1}{2}k\,d_{max}^2 = mgh$$

$$\Rightarrow d_{max}^2 - \frac{2mg}{k}d_{max} - \frac{2mg}{k}h = 0$$

men: $mg = kd_1 \Rightarrow k = \frac{mg}{d_1}$



$$\therefore\ d_{max}^2 - 2d_1 d_{max} - 2d_1 h = 0$$

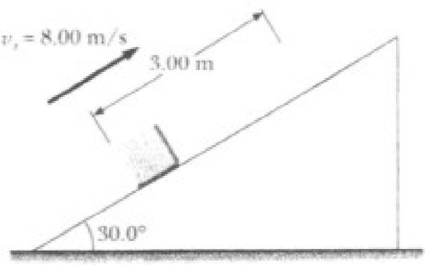
$$\Rightarrow d_{max} = d_1 \pm \sqrt{d_1^2 + 2d_1 h} = [d_{max} > d_1]$$

$$= d_1\left(1 + \sqrt{1 + 2\frac{h}{d_1}}\right)$$

med $h = 6\,m$, $d_1 = 1\,m \Rightarrow d_{max} = 4{,}6\,m$

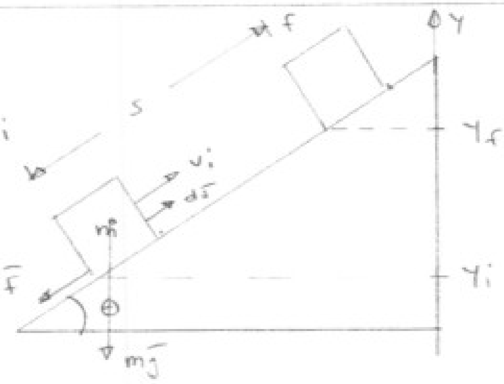
7.25

25. A 5.00-kg block is set into motion up an inclined plane with an initial speed of 8.00 m/s (Fig. P7.25). The block comes to rest after traveling 3.00 m along the plane, which is inclined at an angle of 30.0° to the horizontal. For this motion, determine (a) the change in the block's kinetic energy, (b) the change in the potential energy of the block–Earth system, and (c) the friction force exerted on the block (assumed to be constant). (d) What is the coefficient of kinetic friction?



Lösning:

givet: $v_i = 8{,}00$ m/s $\quad v_f = 0$
$\theta = 30°$ $\quad m = 5{,}00$ kg
$s = 3{,}00$ m



a) ΔK:

$$\Delta K = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = 0 - \frac{1}{2} m v_i^2 = -\frac{1}{2}\, 5{,}0 (8{,}00)^2 =$$
$$= \underline{\underline{-160\ J}}$$

b) ΔU (i grav.fältet)

$$\Delta U = mg\,\Delta y = mg(y_f - y_i) = mg\, s \cdot \sin\theta =$$
$$= 5{,}00 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}00 \sin 30° = \underline{\underline{73{,}5\ J}}$$

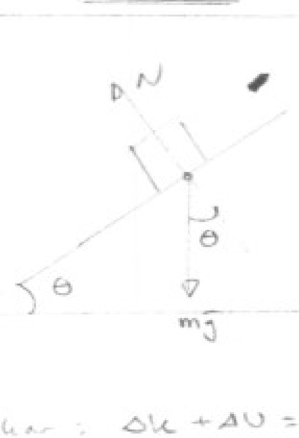
c) friktionskraften $|\bar{f}|$: $\qquad \bar{F} = \bar{f} + m\bar{g}$

$$\int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

$$\int_i^f (\bar{f} + m\bar{g}) \cdot d\bar{s} = \int_i^f \bar{f} \cdot d\bar{s} + \int_i^f m\bar{g} \cdot d\bar{s} = -fs + (-\Delta U)$$

$$\Rightarrow -fs - \Delta U = \Delta K \quad \Rightarrow f = -\frac{\Delta K + \Delta U}{s} = -\frac{(-160) + 73{,}5}{3{,}00} =$$
$$= \underline{\underline{28{,}8\ N}}$$

d) μ_k:
$$\left.\begin{aligned} f &= \mu_k \cdot N \\ N &= mg \cdot \cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow f = \mu_k\, mg \cos\theta$$

$$\Rightarrow \mu_k = \frac{f}{mg \cdot \cos\theta} = \underline{\underline{0{,}678}}$$

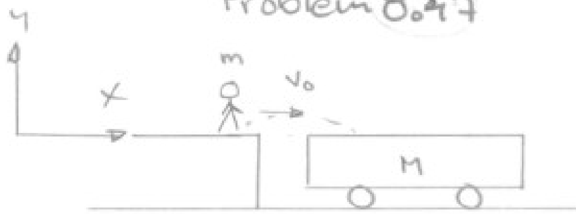
Obs!
$$\int_i^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

Om endast konservativa krafter verkar: $\Delta K + \Delta U = 0 \quad \Rightarrow \Delta K = -\Delta U$

$$\therefore \int^f \bar{F} \cdot d\bar{s} = -\Delta U$$

Problem 8.47

8.47



Lösning:

$m = 60{,}0\ kg \quad M = 120{,}0\ kg$
$v_0 = 4{,}00\ m \quad \mu_k = 0{,}400$

a) sluthastighet för (m+M) relativt marken.

inga externa krafter i x-led
$\Rightarrow P_x$ bevaras

$m\bar{v}_0 + 0 = (m+M)\bar{v}_f$

$$\Rightarrow \bar{v}_f = \frac{m}{m+M}\bar{v}_0 = \frac{60}{60+120} 4{,}00\hat{x} =$$
$$= 1{,}33\hat{x}\,m/s$$

b) friktionskraft på m under glidningsfasen:

$\Sigma \bar{F}_y = 0 \qquad N = mg \qquad f = \mu_k N = \mu_k mg = 0{,}400 \cdot 60 \cdot 9{,}81 = \underline{\underline{235\,N}}$

$\bar{f} = 235(-\hat{x})\,N$

c) Under hur lång tid glider m?

$$\frac{d\bar{p}}{dt} = \bar{F} = \bar{f} \Rightarrow d\bar{p} = \bar{F}\cdot dt \Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta\bar{p} &= \bar{F}\cdot\Delta t \\ \Delta\bar{p} &= m\bar{v}_f - m\bar{v}_i \\ \bar{v}_f &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m(\bar{v}_f - \bar{v}_i) = \bar{f}\,\Delta t \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{m(\bar{v}_f - \bar{v}_i)}{\bar{f}} = \frac{60{,}0(1{,}33 - 4{,}00)\hat{x}}{-235\hat{x}} = \underline{\underline{0{,}68\,s}}$$

alt. retardation $a = -\frac{f}{m}$ $\qquad a\cdot\Delta t = v_f - v_i \Rightarrow \Delta t = \frac{4{,}00 - 1{,}33}{\frac{235}{60}} = 0{,}68\,s$

d) Δp_m & Δp_M:

$\Delta\bar{p}_m = m\bar{v}_f - m\bar{v}_i = 60(1{,}33 - 4{,}00)\hat{x} =$
$= -160\ kgm/s\ \hat{x}$

$\Delta\bar{p}_M = M\bar{v}_f - 0 = 120 \cdot 1{,}33\,\hat{x}\ kgm/s = +160\,\hat{x}\ kgm/s$

e) Δx under glidningen. $\quad v_f^2 - v_i^2 = 2\cdot a\,\Delta x$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{v_f^2 - v_i^2}{-2\frac{f}{m}} = \frac{1{,}33^2 - 4{,}00^2}{-2\,\frac{235}{60}} = \underline{\underline{1{,}81\,m}}$$

f) Förflyttning av vagnen under glidningsfasen $\Delta x'$

På vagnen verkar $-\bar{f}$ dvs en accelererande kraft. $235\hat{x}$ N

$$\bar{a}_M = \frac{-\bar{f}}{M} = \frac{235}{120}\hat{x}$$

$$v_f^2 - v_i^2 = 2 \cdot a_M \cdot \Delta x' \Rightarrow \Delta x' = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2a_M} = \frac{1{,}33^2 - 0^0}{2\frac{235}{120}} \text{ m} = \underline{\underline{0{,}45 \text{ m}}}$$

---

g) ΔK_m:

$$\Delta K_m = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}60 \cdot 1{,}33^2 - \frac{1}{2}60 \cdot 4{,}00^2 =$$

$$= \underline{\underline{-426{,}7 \text{ J}}}$$

---

h) ΔK_M:

$$\Delta K_M = \frac{1}{2}Mv_f^2 - 0 = \frac{1}{2}120 \cdot (1{,}33)^2 \text{ J} = \underline{\underline{106{,}7 \text{ J}}}$$

---

i) Skillnaden mellan ΔK_M och ΔK_m: $= 320$ J

Friktionsarbete under m:s glidning.

$\Delta x_i = 1{,}81$ m glidning relativt marken

$\Delta x' = 0{,}45$ m vagnens rörelse rel. marken under glidningsfasen.

$\Delta s =$ m:s glidsträcka på vagnen $= \Delta x - \Delta x'$

$$W_f = f \cdot \Delta s = 235(1{,}81 - 0{,}45) \approx \underline{\underline{320 \text{ J}}}. \quad \text{ok!}$$

10.49

A puck of mass 80.0 g and radius 4.00 cm slides along an air table at a speed of 1.50 m/s as shown in Figure P11.34a. It makes a glancing collision with a second puck of radius 6.00 cm and mass 120 g (initially at rest) such that their rims just touch. Because their rims are coated with instant-acting glue, the pucks stick together and spin after the collision (Fig. P11.34b). (a) What is the angular momentum of the system relative to the center of mass? (b) What is the angular speed about the center of mass?

~~10.34~~

①

Givet: $m_1 = 80{,}0\,g$ $R_1 = 4{,}00$ cm $v_1 = 1{,}50$ m/s

$m_2 = 120\,g$ $R_2 = 6{,}00$ cm

Sökt: L relativt masscentrum hos

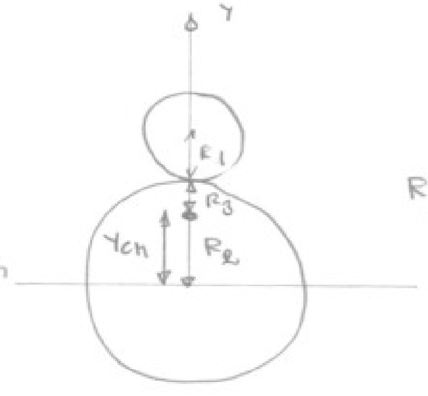
ω

a) Bestäm masscentrum för det sammanslagna systemet.

$$\bar{Y}_{CM} = \frac{m_1(R_2+R_1)+0}{m_1+m_2}\hat{y} =$$

$$= \frac{80{,}0\,(0{,}06+0{,}04)}{80+120}\hat{y} = 0{,}04$$

$= \underline{4\text{ cm}}$



$R_2 - Y_{CM} = R_3$

$R_3 = 2{,}00$ cm

b) L map $\bar{Y}_{CM}$

Omedelbart före kollision: $V_{stor} = 0$

$$\bar{L}_i = +m_1 v_1 (R_1 + R_3)\hat{z} = +0{,}080 \cdot 1{,}5\,(4{,}00 + 2{,}00)\hat{z} =$$

$$= \underline{\underline{+7{,}20 \cdot 10^{-3}\hat{z}\,kgm/s}}$$

c) ω: L bevaras $L_f = I_1\omega + I_2\omega$

I_1 = tröghetsmomentet m.a.p. Y_{CM} (liten)

I_2 = —— " —— (stor)

$$I_1 = \frac{1}{2}m_1R_1^2 + m_1(R_1+R_3)^2 = \frac{1}{2}0{,}080 \cdot 0{,}04^2 + 0{,}080\,(0{,}04+0{,}02)^2 =$$

$$= 3{,}52 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$I_2 = \frac{1}{2}m_2R_2^2 + m_2 Y_{CM}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}0{,}120 \cdot 0{,}06^2 + 0{,}120 \cdot 0{,}04^2 = 4{,}08 \cdot 10^{-4}\,kgm^2$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 = \underline{\underline{7{,}60\,kgm^2}}$$

10.49

~~10.34~~

forts.

$$L_i = L_f = I_{tot} \cdot \omega$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{L_i}{I_{tot}} = \frac{7{,}20 \cdot 10^{-3}}{7{,}60 \cdot 10^{-4}} \text{ rad/s} =$$

$$= \underline{\underline{9{,}47 \text{ rad/s}}}$$