1. En enatomig idealgas befinner sig vid temperaturen 200 K och upptar volymen 2 kubikmeter. Gasen genomgår en kretsprocess bestående av följande delprocesser:

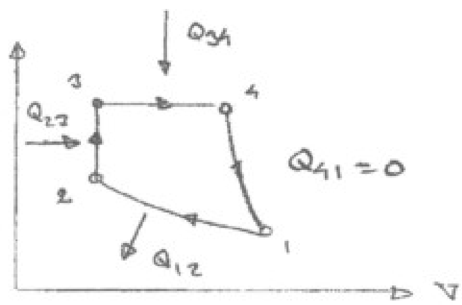
   - isoterm kompression till halva ursprungsvolymen.
   - isokor ökning av trycket med 25%.
   - isobar expansion.
   - adiabat till utg. läget

   Bestäm processens termiska verkningsgrad.

Lösning:

enatomig gas: $C_V = \frac{3}{2}R$, $C_p = \frac{5}{2}R$, $\gamma = \frac{5}{3}$

$$\eta = \frac{|\Sigma W|}{\Sigma Q_{till}} = \frac{\Sigma Q}{\Sigma Q_{till}} = \frac{Q_{12}+Q_{23}+Q_{34}}{Q_{23}+Q_{34}}$$



Beräkna samtliga Q:n.

$$Q_{12} = -W_{12}$$

1 → 2 : isoterm: $W_{12} = nRT_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = nR \cdot 200 \cdot \ln\frac{1}{2} =$

$V_2 = \frac{1}{2}V_1$ $\qquad = -nR \cdot 138{,}6 < 0$

---

2 → 3 : isokor: $Q_{23} = n \cdot C_V (T_3 - T_2) = n \cdot \frac{3}{2}R(250 - 200) = +nR \cdot 75$

$$\left.\begin{matrix} p_3 = 1{,}25\, p_2 \\ V_3 = V_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow T_3 = 1{,}25\, T_1 = 1{,}25 \cdot 200 = 250\ \text{K}$$

---

3 → 4 : isobar: $Q_{34} = n C_p (T_4 - T_3) = n\frac{5}{2}R(T_4 - T_3)$

Bestäm T_4!

$$\left.\begin{matrix} \text{adiabat: } pV^\gamma = \text{konst} \\ \text{idealgaslagen: } pV = nRT \\ \Rightarrow p = nRTV^{-1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = \text{konstant}$$

$$\therefore T_4 V_4^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1}$$

dessutom:

$$\left.\begin{matrix} p_3 V_3 = nRT_3 \\ p_3 \rightarrow p_4 V_4 = nRT_4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{V_3}{V_4} = \frac{T_3}{T_4}$$

$$\Rightarrow V_4 = V_3 \frac{T_4}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_4 \cdot V_3^{\gamma-1} \cdot \left(\frac{T_4}{T_3}\right)^{\gamma-1} = T_1 V_1^{\gamma-1} \Rightarrow T_4^{\gamma} = T_3^{\gamma-1}\left(\frac{V_1}{V_3}\right)^{\gamma-1} T_1 =$$

$$\Rightarrow T_4^{\gamma} = 250^{\gamma-1} \cdot (2)^{\gamma-1} \cdot 200 \Rightarrow T_4 = \left[250^{2/3} \cdot (2)^{2/3} \cdot 200\right]^{3/5} = 288\ \text{K}$$

$$\Rightarrow Q_{34} = nR\frac{5}{2}(288 - 250) = nR \cdot 95 \quad ; \quad \eta = \frac{-138{,}6 + 75 + 95}{75 + 95} = \underline{\underline{0{,}185}}$$

2. En kretsprocess består av följande delprocesser:
   1-2: isokor uppvärming från $p_1 = 1{,}0$ atm, $T_1 = 300$ K till $p_2 = 15{,}0$ atm

   2-3: adiabatisk expansion till $p_3 = 1{,}0$ atm

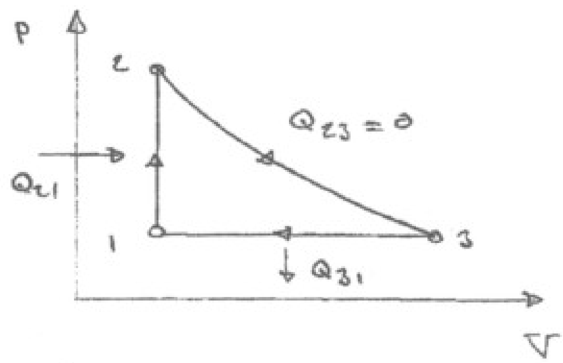
   3-1: isobar avkylning

   Bestäm verkningsgraden om gasen är enatomig med idealt uppförande.

<u>Lösning:</u> enatomig gas:

$C_V = \frac{3}{2}R \quad C_p = \frac{5}{2}R \quad \gamma = \frac{5}{3}$

$$\eta = \frac{\Sigma Q}{\Sigma Q_{\text{tillf}}} = \frac{Q_{12} + Q_{31}}{Q_{12}}$$



$1 \to 2$ isokor: $Q_{12} = n\frac{3}{2}R\cdot(T_2 - T_1)$

$T_1 = 300\text{ K} \quad V_2 = V_1 \quad p_2 = 15p_1 \Rightarrow T_2 = 15T_1 = 15\cdot 300 = 4500\text{ K}$

$\Rightarrow Q_{12} = nR\,\frac{3}{2}(4500 - 300) = nR\,6300$

$3 \to 1$: isobar: $Q_{12} = n\frac{5}{2}R(T_1 - T_3)$

Bestäm T_3! adiabat $pV^\gamma = \text{konstant}$

$pV = nRT \Rightarrow V = nRT\frac{1}{p}$

$\Rightarrow p\left(\frac{T}{p}\right)^\gamma = \text{konst}$

$\Rightarrow p^{1-\gamma/\gamma}\cdot T = \text{konst}$

$\Rightarrow T_3 \cdot p_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2\, p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$

$\Rightarrow T_3 = \left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \cdot T_2 = \left(\frac{15p_1}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} 4500 = 15^{-2/5}\, 4500 =$

$1 - \gamma = \frac{3}{3} - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{\frac{1-\gamma}{\gamma} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = -\frac{2}{5}}$ $= 1523\text{ K}$

$\Rightarrow Q_{12} = nR\,\frac{5}{2}(300 - 1523) = nR(-3057{,}5)$

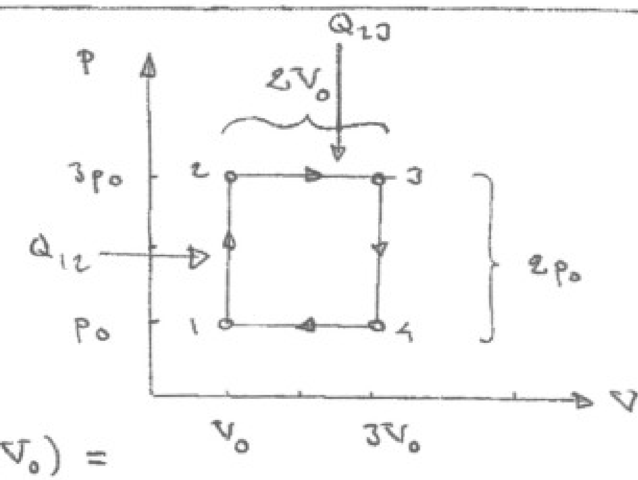
$\therefore \eta = \frac{6300 - 3057{,}5}{6300} = \underline{0{,}51}$

trycket

4. En mol enatomig idealgas genomlöper en kretsprocess som består av följande steg; en isokor där ~~volymen~~ tredubblas följt av en isobar där volymen tredubblas följt av en isokor där volymen reduceras till en tredjedel följt av en isobar tillbaka till utgångstillståndet. Beräkna processens termiska verkningsgrad.

trycket

Lösning: $\eta = \dfrac{\Sigma W_{gas}}{\Sigma Q_{tillf}}$



enatomig idealgas:

$C_v = \frac{3}{2}R \quad C_p = \frac{5}{2}R$

$$\Sigma W_{gas} = 3p_0(3V_0 - V_0) + p_0(V_0 - 3V_0) =$$

$$= 9p_0V_0 - 3p_0V_0 + p_0V_0 - 3p_0V_0 = 4p_0V_0 = 4nRT_1$$

$$T_2 = 3T_1, \quad T_3 = 3T_2 = 9T_1, \quad T_4 = \frac{1}{3}T_3 = 3T_1$$

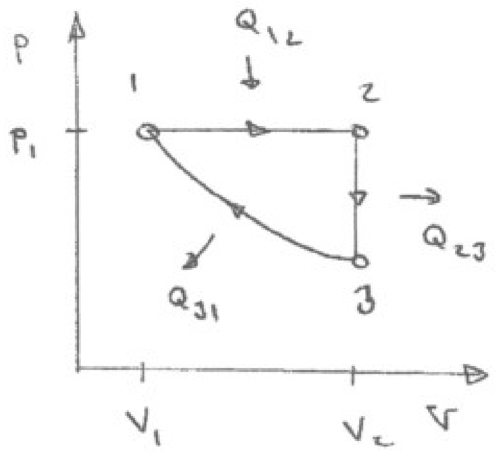
$$Q_{12} = nC_v(T_2 - T_1) = n\frac{3}{2}R(3T_1 - T_1) = nR\,3T_1$$

$$Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2) = n\frac{5}{2}R(9T_1 - 3T_1) = nR\,15T_1$$

$$\therefore \quad \eta = \frac{4T_1}{3T_1 + 15T_1} = \frac{4}{18} = \underline{\underline{0{,}22}}$$

5. En viss gasmassa genomlöper en reversibel kretsprocess bestående av en isobar expansion, en isokor samt en isoterm kompression Hur stor blir verkningsgraden om förhållandet mellan högsta och lägsta temperatur är 1,47 och man vet att gasen innehåller enatomiga molekyler.

Lösning:



$1 \to 2$: isobar
$2 \to 3$: isokor
$3 \to 1$: isoterm

$$\eta = \frac{\Sigma W_{gas}}{\Sigma Q_{tillf}}$$

$1 \to 2$: $W_{12g} = p_1 (V_2 - V_1)$

$Q_{12} = n\, c_p (T_2 - T_1)$

$2 \to 3$ $Q_{23} = n\, c_v (T_3 - T_2)$

$3 \to 1$: $Q_{31} = W_{31} = n' R T_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_3}$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1{,}47$$

$$\Rightarrow \eta = \frac{p_1(V_2 - V_1) + n R T_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_3}}{n' c_p (T_2 - T_1)}$$

Uttryck allt i T_1 och T_2 !

$pV = nRT \Rightarrow p_1 (V_2 - V_1) = nR(T_2 - T_1)$

$p_1 V_1 = n R T_1$

$p_2 V_2 = p_1 V_3 = n R T_2 \Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_2}$

$$\Rightarrow \eta = \frac{(T_2 - T_1) + T_1 \cdot \ln \frac{T_1}{T_2}}{\frac{5}{2}(T_2 - T_1)} =$$

$$= \frac{(1{,}47 - 1) + \ln 1/1{,}47}{\frac{5}{2}(1{,}47 - 1)} = \underline{0{,}072}$$

6. 1,0 kg syrgas genomlöper en kretsprocess som består av följande delprocesser:

1-2: isoterm expansion vid temperaturen 493 K mellan volymerna 1,0 och 4,0 kubikmeter

2-3: isokor

3-4: isoterm kompression vid temperaturen 293 K.

4-1: adiabat.

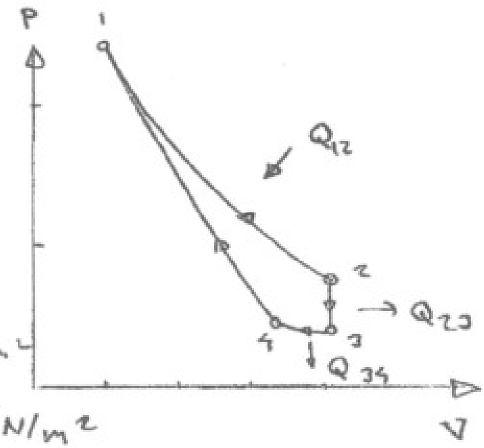
Beräkna tryck och volym i delprocessernas ändpunkter och bestäm dessutom verkningsgraden.

Lösning:

O_2 : 32u $M_{mol} = 0{,}032$ kg.

$\gamma = \frac{7}{5}$ $m = 1{,}0$ kg.

$n' = \frac{1000}{32}$



$$p_1 = \frac{n}{V_1} RT_1 = \frac{1000}{32 \cdot 1{,}0}\, 8{,}31 \cdot 493 = 1{,}28 \cdot 10^5\ N/m^2$$

$$V_2 = 4V_1 \quad T_2 = T_1 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{4} p_1 = 0{,}32 \cdot 10^5\ N/m^2$$

$$T_3 = 293\,K \quad V_3 = V_2 \Rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_2}{T_3} = 0{,}19 \cdot 10^5\ N/m^2$$

$$\left.\begin{array}{l} p_4 V_4^{\gamma} = p_1 V_1^{\gamma} \\ p_4 V_4 = p_3 V_3 \end{array}\right\} \Rightarrow V_4^{\gamma-1} = \frac{p_1 V_1^{\gamma}}{p_3 V_3}$$

$$\Rightarrow V_4^{\frac{7}{5}-1} = \frac{1{,}28 \cdot 1^{7/5}}{0{,}19 \cdot 4{,}0} \Rightarrow V_4 = 3{,}68\ m^3$$

$$\Rightarrow p_4 = n' \frac{RT_4}{V_4} = 0{,}2065 \cdot 10^5\ N/m^2$$

	T (K)	V (m^3)	P ($10^5\ N/m^2$)
1	493	1	1,28
2	493	4	0,32
3	293	4	0,19
4	293	3,68	0,206

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{23} + Q_{34}}{Q_{12}}$$

$$\left.\begin{array}{l} Q_{12} = nRT_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} \\ Q_{23} = n C_V (T_3 - T_2) \\ Q_{34} = nRT_3 \ln \frac{V_4}{V_3} \end{array}\right\} \Rightarrow \eta = \frac{493 \cdot \ln 4 + \frac{5}{2}(293-493) + 293 \cdot \ln \frac{3{,}68}{4}}{493 \cdot \ln 4} =$$

$$= \frac{683{,}44 - 500 - 24{,}4}{683{,}44} = \underline{0{,}23}$$

7. 25 liter av en enatomig idealgas befinner sig ursprungligen vid temperaturen 350 grader Celsius och trycket 4,0 atm. Gasen får expandera isotermt till dubbla volymen. Därpå komprimeras gasen till volymen V_3 som är så vald att man genom adiabatisk kompression kan återföra den till det ursprungliga tillståndet. Hur mycket värme tillförs under isotermen? Hur mycket arbete uträttas under adiabaten? Hur stor är verkningsgraden?

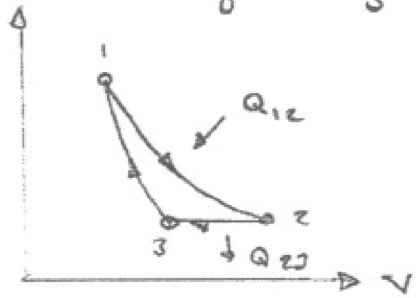
Lösning: enatomig gas: $C_V = \frac{3}{2}R$ $\quad C_p = \frac{5}{2}R$ $\quad \gamma = \frac{5}{3}$ $\quad \frac{1-\gamma}{\gamma} = -\frac{2}{5}$

Givet: $V_1 = 25$ liter $\quad V_2 = 50$ liter

$T_1 = 623$ K

$p_1 = 4,0$ atm

Sökt: Q_{12}, W_{31}, η



Q_{12}:

$$Q_{12} = nRT_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$n = \frac{p_1V_1}{RT_1} =$$

$(= 1,95)$

$$\Rightarrow Q_{12} = p_1V_1 \cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = 4,0 \cdot 1,013 \cdot 10^5 \cdot 0,025 \cdot \ln 2 = \underline{\underline{7000\ \text{J}}}$$

av gasen utr. arbete!

W_{31}: $\quad Q_{31} = 0$

$$W_{31} = -\Delta U_{31} = -nC_V(T_1 - T_3) = nC_V(T_3 - T_1) < 0$$

Bestäm T_3! $\quad 3 \to 1$ adiabat $\Rightarrow T_3\, p_3^{1-\gamma/\gamma} = T_1\, p_1^{1-\gamma/\gamma}$

$$\Rightarrow T_3 = T_1\left(\frac{p_1}{p_3}\right)^{1-\gamma/\gamma}$$

$$\left.\begin{array}{l} T_1 = T_2 \\ p_3 = p_2 \\ V_2 = 2V_1 \end{array}\right\} \Rightarrow p_3 = \frac{p_1}{2}$$

$$\Rightarrow T_3 = T_1 \cdot 2^{1-\gamma/\gamma} = 623 \cdot 2^{-\frac{2}{5}} = 472\ \text{K}$$

$$\therefore W_{31} = nC_V(T_3 - T_1) = \frac{p_1V_1}{RT_1}\,\frac{3}{2}R\,(472 - 623) = \underline{-3671\ \text{J}}$$

η: $\quad \eta = \frac{Q_{12} + Q_{23}}{Q_{12}}$ $\qquad Q_{23} = nC_p(T_3 - T_2) = n\,\frac{5}{2}R\,(472 - 623) = -6117$ J

$$\Rightarrow \eta = \frac{7000 - 6117}{7000} = 0,126 \text{ dvs } \underline{\underline{13\,\%}}$$

8. En idealgasmotor arbetar med två mol av en enatomig gas och karakteriseras av arbetscykelns tre steg:

1-2: isobar från utgångsvolym V_1 och utgångstemperatur $T_1 = 300$ K till temperaturen $T_2 = 800$ K.

2-3: adiabat tills temperaturen fallit tillbaka till T_1.

3-1: isoterm till den ursprungliga volymen V_1.

Hur mycket arbete utför gasen under adiabaten, hur mycket värme tillförs under isobaren, hur stor är verkningsgraden?

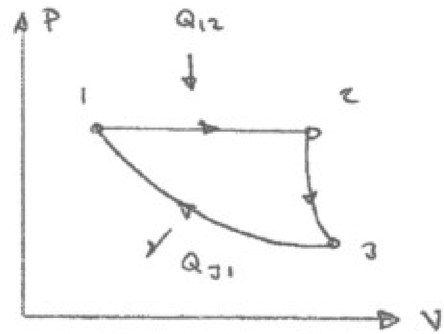
Lösning:

$n = 2{,}0$

Givet: $T_1 = T_3 = 300\,\text{K}$ $\quad T_2 = 800\,\text{K}$

$1 \to 2$ isobar, $2 \to 3$ adiabat, $3 \to 1$ isoterm

Sökt: W_{23}, Q_{12}, η



W_{23}:

$$W_{23} = -\Delta U_{23} = -n\,C_v(T_3 - T_2) = -2{,}0 \cdot \frac{3}{2} R\,(300 - 800) = 12465\,\text{J} = \underline{\underline{1{,}2 \cdot 10^{3}\,\text{J}}}$$

Q_{12}:

$$Q_{12} = n\,C_p(T_2 - T_1) = 2{,}0 \cdot \frac{5}{2} R\,(800 - 300) = 20775\,\text{J} = \underline{\underline{2{,}1 \cdot 10^{3}\,\text{J}}}$$

η:

$$\eta = \frac{Q_{12} + Q_{31}}{Q_{12}}$$

$$Q_{31} = n \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_1}{V_3}$$

men $T_2 V_2^{\gamma - 1} = T_1 V_3^{\gamma - 1}$

dessutom

$$\frac{V_2}{T_2} = \frac{V_1}{T_1} \Rightarrow V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Rightarrow T_2 \left(V_1 \frac{T_2}{T_1}\right)^{\gamma - 1} = T_1 V_3^{\gamma - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_3} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\gamma/\gamma - 1}$$

$$\frac{\frac{5}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow Q_{31} = 2{,}0 \cdot 8{,}31 \cdot 300 \cdot \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_2} = -12226\,\text{J}.$$

$$\therefore \eta = \frac{20775 - 12226}{20775} = 0{,}41 \text{ dvs } \underline{\underline{41\,\%}}$$