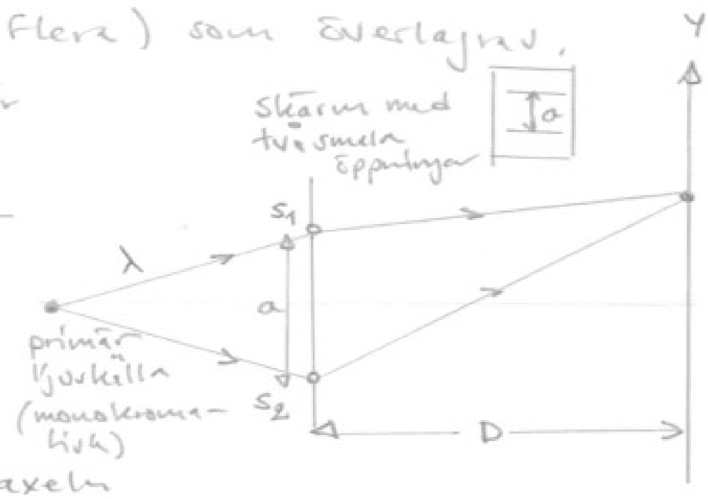
# Interferens. – Gitter – Diffraktion

Fortsättningen av kursen kommer att handla om vågor (två eller flera) som överlagras.
Det enklaste fallet är

## Youngs dubbelspalt.

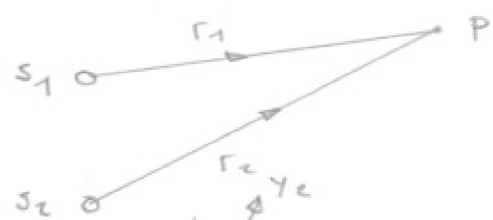



Det är vanligt att $D >> a$

$S_1$ och $S_2$ är alltså två synkrona störningskällor

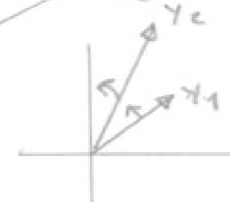
När vi vandrar utefter y-axeln kommer intensiteten att variera

För en <u>bestämd</u> punkt P gäller




$$Y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t - kr_1)$$
$$Y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t - kr_2)$$

$$Y_{tot} = Y_1 + Y_2$$

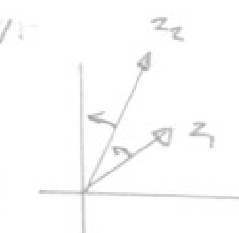



Pilarna snurrar runt med $\omega$!

Vi vet att $I \sim (Y_{tot})^2 = (Y_1 + Y_2)^2$

Algebran blir enklare om vi skriver om $Y_1$ och $Y_2$ som komplexa tal och studerar absolutbeloppet av deras summa

$$Y_1 \curvearrowright z_1(r, t) = A_1 e^{j(\omega t - kr_1)}$$
$$Y_2 \curvearrowright z_2(r, t) = A_2 e^{j(\omega t - kr_2)}$$




I punkten P har $kr_1$ värdet $-\delta_1$ och $kr_2$ värdet $-\delta_2$

$$\Rightarrow z_{tot} = A_1 e^{j(\omega t + \delta_1)} + A_2 e^{j(\omega t + \delta_2)} =$$
$$= (A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2})\, e^{j\omega t}$$

$A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2}$ är en komplex amplitud

$$I \sim (\text{amplitud})^2 \Rightarrow I \sim (A_1 e^{j\delta_1} + A_2 e^{j\delta_2})^2 =$$
$$= (A_1 \cos\delta_1 + A_2 \cos\delta_2)^2 + (A_1 \sin\delta_1 + A_2 \sin\delta_2)^2 =$$

$$= A_1^2 \cdot \cos^2\delta_1 + A_2^2 \cos^2\delta_2 + 2A_1A_2\cos\delta_1\cos\delta_2 +$$

$$+ A_1^2 \sin^2\delta_1 + A_2 \sin^2\delta_2 + 2A_1A_2 \sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\left(\sin\delta_1 \cdot \sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2\right) =$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta_1 - \delta_2)$$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 \cdot I_2} \cdot \cos(\delta_1 - \delta_2)$$

---

I Youngs dubbelspalt gäller $I_1 \approx I_2$

$$\Rightarrow I_{tot} = I_1 + I_1 + 2I_1\cos(\delta_1 - \delta_2) =$$

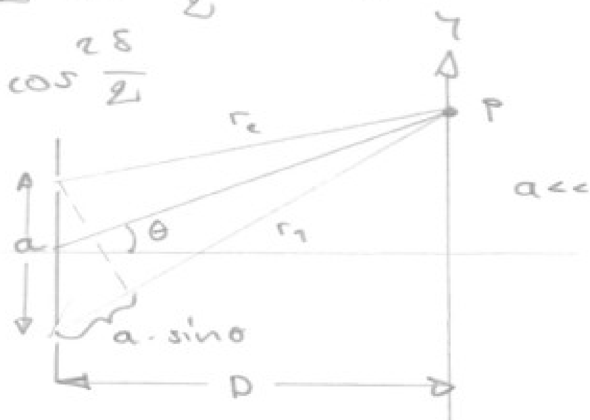
$$= 2I_1\left[1 + \cos(\delta_1 - \delta_2)\right] =$$

$$= 2I_1 \cdot 2\cos^2\frac{\delta_1 - \delta_2}{2} = \left[\delta_1 - \delta_2 = \delta\right] =$$

$$= 4I_1 \cdot \cos^2\frac{\delta}{2}$$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \approx$$

$$\approx \frac{2\pi}{\lambda} a \cdot \sin\theta$$




$a \ll D$ !!!

Vi får en intensitetsvariation längs y-axeln enligt

$$I(y) = 4I \cdot \cos^2\frac{\delta}{2} = 4I \cdot \cos^2\left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda}a \cdot \sin\theta}{2}\right) =$$

$$= 4I\cos^2\left(\frac{\pi}{\lambda}a \cdot \sin\theta\right)$$

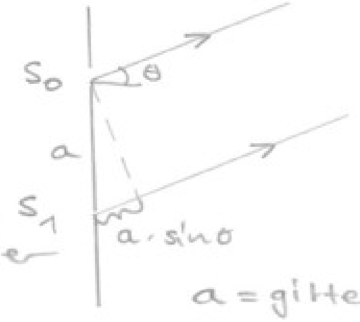
maximum: $\frac{\pi}{\lambda}a \cdot \sin\theta = m\pi$

$\Rightarrow a \cdot \sin\theta = m\lambda$

minimum: $\frac{\pi}{\lambda}a \cdot \sin\theta = (2m+1)\frac{\pi}{2}$

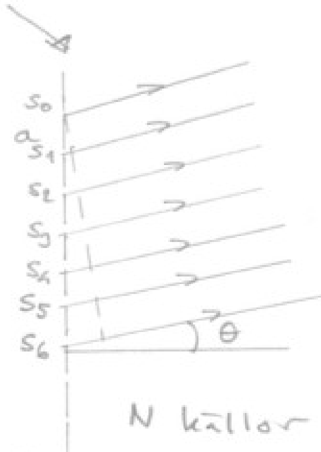
$\Rightarrow a \cdot \sin\theta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$

## Många synkrona källor (gitter)



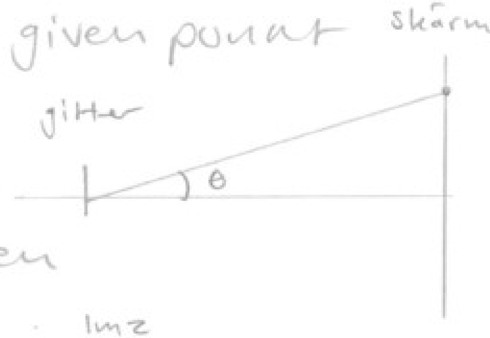

a = avst mellan mittpunkter på grannspalter

a = gitterkonstanten




Sätt $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cdot \sin\theta$ = fasskillnaden mellan två närbelägna öppningar.

Vi använder nu samma teknik för att lägga ihop störningarna i en given punkt P på en skärm




störningen på den streckade linjen i figuren till höger längst upp.

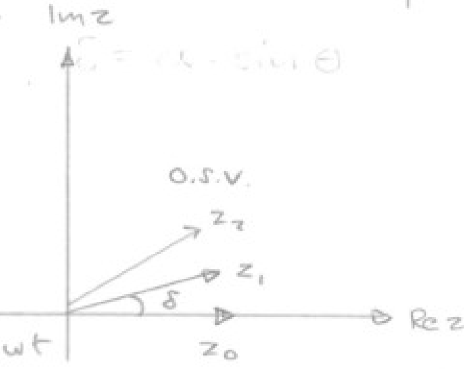
$$z_0 = A e^{j\omega t}$$

$$z_1 = A e^{j(\omega t + \delta)} = A e^{j\delta} \cdot e^{j\omega t}$$

$$z_2 = A e^{j(\omega t + 2\delta)} = A e^{j2\delta} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\vdots$$

$$z_{N-1} = A e^{j[\omega t + (N-1)\delta]} = A e^{j(N-1)\delta} \cdot e^{j\omega t}$$




$$z_{tot} = \sum_{i=0}^{N-1} z_i = A' e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}$$

$A' e^{j\phi}$ = den totala störningens komplexa ampl.

där $$A' e^{j\phi} = A\left(1 + e^{j\delta} + e^{j2\delta} + \dots + e^{j(N-1)\delta}\right)$$

För en geometrisk serie med kvoten $e^{j\delta}$ som har N termer gäller att summan är $\frac{1-k^N}{1-k}$

$$\Rightarrow A' e^{j\phi} = A \frac{1 - e^{jN\delta}}{1 - e^{j\delta}}$$

Intensiteten $\sim$ (amplituden)$^2$

(4)

$$\Rightarrow I \sim |A' e^{j\phi}|^2 = A^2 \frac{(1-e^{jN\delta})(1-e^{-jN\delta})}{(1-e^{j\delta})(1-e^{-j\delta})} =$$

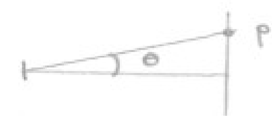
$$= A^2 \frac{1+e^{-jN\delta} - e^{jN\delta} - e^{jN\delta - jN\delta}}{1-e^{-j\delta} - e^{j\delta} - e^{j\delta - j\delta}} = A^2 \frac{2-e^{-jN\delta} - e^{jN\delta}}{2-e^{-j\delta}-e^{j\delta}} =$$

$$= A^2 \frac{2-(\cos N\delta - j\sin N\delta) - (\cos N\delta + j\sin N\delta)}{2-(\cos\delta - j\sin\delta) - (\cos\delta + j\sin\delta)} =$$

$$= A^2 \frac{2-2\cos N\delta}{2-2\cos\delta} = A^2 \frac{1-\cos N\delta}{1-\cos\delta} = \left[\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\right] =$$

$$= A^2 \frac{\sin^2 \frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}}$$

$\delta$ är en fasvinkel som beror av riktningen $\theta$ från gittret till observationspunkten P




I bråket ovan har vi en "snabb" täljare och en "långsam" nämnare.
När $\theta$ ändras så ändras täljaren snabbare än nämnaren.

Extremvärden

1) Rakt fram $\theta = 0 \Rightarrow \delta = 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\sin^2\frac{N\delta}{2}}{\sin^2\frac{\delta}{2}} = N^2$$

Två varianter som syns i formelsamlingar

$$I_\theta = \begin{cases} I_0' \dfrac{\sin^2 N\delta/2}{\sin^2\delta/2} \\[2ex] I_0 \dfrac{\sin^2 N\delta/2}{N^2\sin^2\delta/2} \end{cases}$$

$I_0'$ = intensiteten från en öppning rakt fram

$I_0$ = int. från alla källorna tillsammans rakt fram

2) Då $\frac{\delta}{2} = m\pi$ (heltal) är både täljare och nämnare noll.

då får vi maximal intensitet $I = I_0$
Dessa maxima kallas <u>huvudmaxima</u> el. <u>principal maxima</u>

---

3) Eftersom täljaren varierar snabbare än nämnaren blir den noll oftare än nämnaren och då blir intensiteten noll.
Detta händer då

$$\sin\left(N\frac{\delta}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow N\frac{\delta}{2} = p\cdot\pi \quad \text{(heltal)}$$

$$\Rightarrow \frac{\delta}{2} = \frac{p}{N}\pi$$

men $\frac{p}{N} \neq$ heltal eftersom då är $\frac{\delta}{2} = m\pi$
och det var ju villkoret för maximum.

$$p \neq mN$$

Vi har alltså minimum när $\frac{\delta}{2} = \frac{p}{N}\pi$

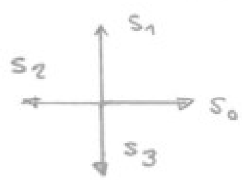
$$\frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} a \sin\theta.$$

$\Rightarrow$ minimum när $a\cdot\sin\theta = \frac{1}{N}\lambda,\ \frac{2}{N}\lambda,\ \frac{3}{N}\lambda,$

$$\ldots \frac{N-1}{N}\lambda,\ -,\ \frac{N+1}{N}$$

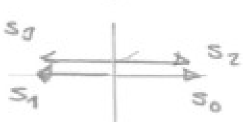
ex. 4 spalter : $N = 4$

min då $a\cdot\sin\theta = \frac{\lambda}{4}$ $\quad \delta = \frac{\pi}{2}$



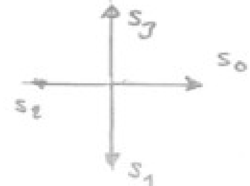

$\Sigma s_i = 0$

$\frac{2\lambda}{4}$ $\quad \delta = \pi$



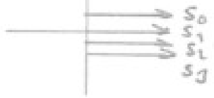

$\Sigma s_i = 0$

$\frac{3\lambda}{4}$ $\quad \delta = \frac{3\pi}{2}$




$\Sigma s_i = 0$

$a\sin\theta = \frac{4\lambda}{4}$
$\Rightarrow \delta = 2\pi$

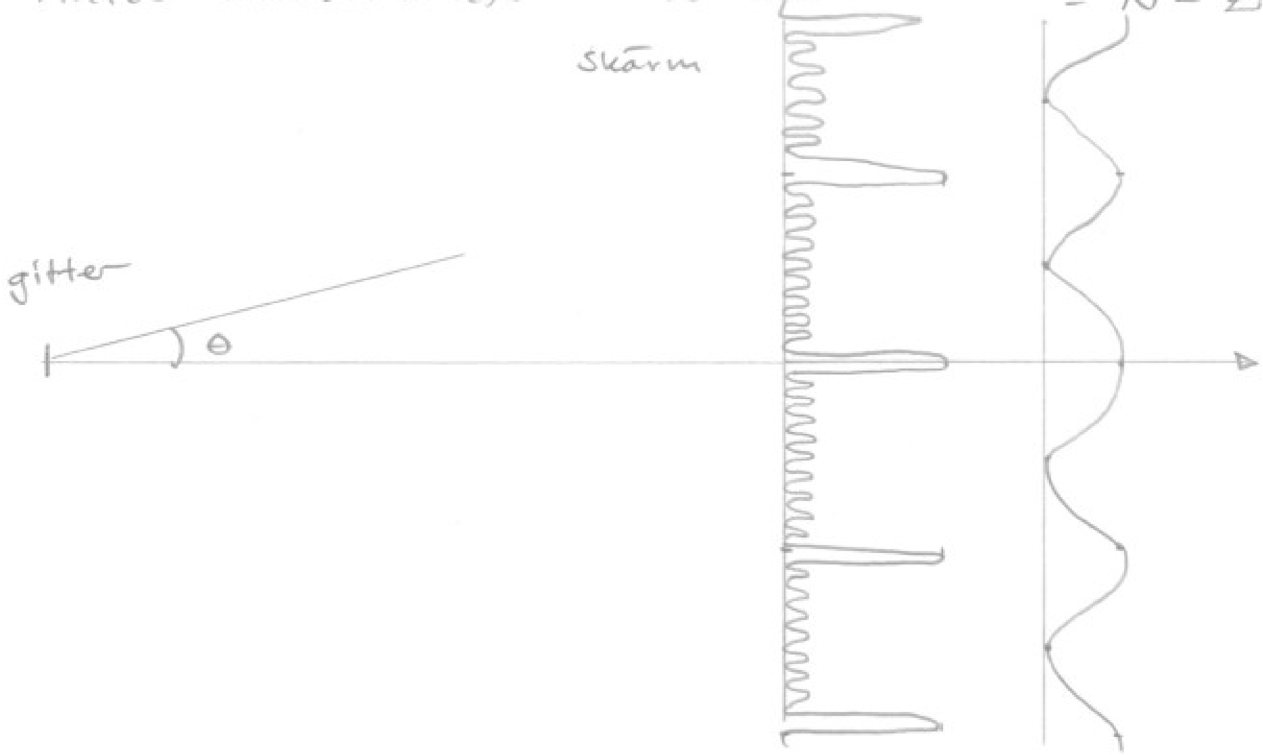



$\Sigma s_i \neq 0$

mellan två minima finns <u>sekundära</u> (svaga) <u>maxima</u>.

Antal minima mellan två huvudmax $= N-1$

Antal sekundärmax — " — $= N-2$.




Obs!

Villkor för ett maximum ges av $a \cdot \sin\theta = m\lambda$

$\Rightarrow$ en dubbelspalt med $a$ som belyses med $\lambda$ har sina maxima på samma ställen som ett gitter med gitterkonstanten $a$. Se ovan.

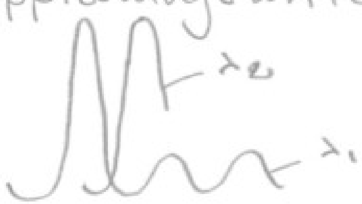
Ett gitter används i "monokromatorer", dvs apparater som "tillverkar" monokromatiskt ljus av vitt ljus (om vi håller oss till synliga $\lambda$)

Schematiskt

## Gittrets upplösningsförmåga

Hur bra är ett visst gitter på att separerar närliggande våglängder från varandra?
Eller: hur bra är ett visst gitter på att skapa smala huvudmaxima?

Upplösningskriterium: Två våglängder är nätt och jämnt upplösta om den enes huvudmax ligger rakt ovanför den andres första minimum.




$\lambda_2$ och $\lambda_1$ är här precis på gränsen att kunna upplösas.


Om $\Delta\lambda$ minskar kryper det undre maximat allt närmare det övre

Hur stort är $\Delta\lambda$ när $(\lambda+\Delta\lambda)$ har maximum vid samma vinkel $\theta'$ där vågl. $\lambda$ har sitt första minimum (efter huvudmaximet)?

$\lambda$: max då $\quad a \cdot \sin\theta = m\lambda$

1:a min då $\quad a \cdot \sin\theta' = \dfrac{mN+1}{N}\lambda$

$\lambda+\Delta\lambda$: maximum som sammanfaller med min ovan då

$$a \cdot \sin\theta' = m(\lambda+\Delta\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{mN+1}{N}\lambda = m(\lambda+\Delta\lambda)$$

$$\Rightarrow mN\lambda + \lambda = mN\lambda + mN\Delta\lambda \Rightarrow \lambda = mN\cdot\Delta\lambda \quad \text{el.} \quad \boxed{\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN}$$

Allmän regel: ju fler vågor som interfererar desto smalare maxima.

ex. $\lambda = 5000$ Å

$\lambda + \Delta\lambda = 5001$ Å

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 5000$$

För upplösning i 1:a ordningen $(m=1)$ krävs $N = 5000$

För upplösning i 2:a ordningen $(m=2)$ krävs $N = 2500$ osv.

---

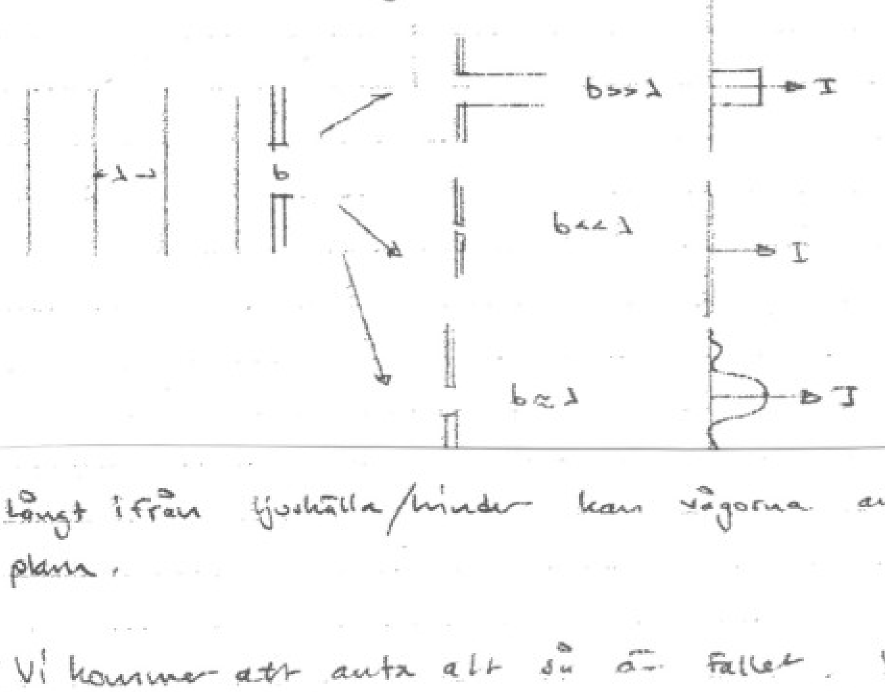
## Böjning – diffraktion

Hittills har vi haft spalter som har mycket liten utsträckning.

Vad händer om spalterna har bredd?

Huygens princip: varje punkt på en vågfront utgör en källa för en sfärisk våg.

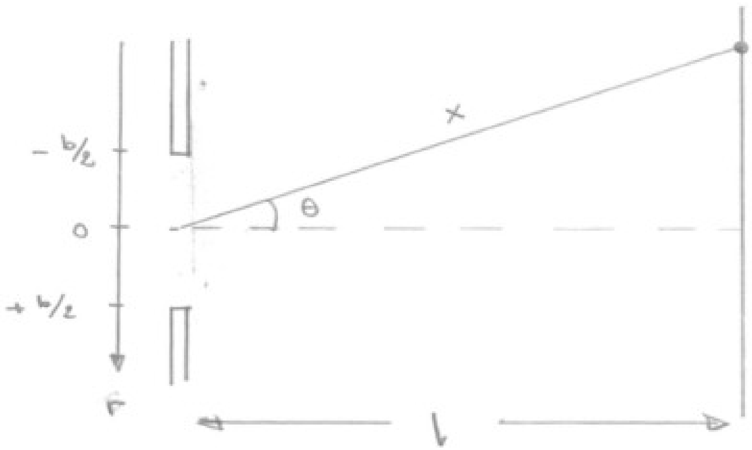
$\Rightarrow$ en plan våg fortsätter att vara plan om dess utsträckning (i sidled) inte begränsas.

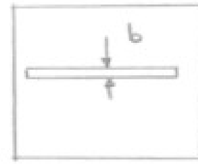



Långt ifrån ljuskälla/hinder kan vågorna anses vara plana.

Vi kommer att anta att så är fallet. Vi studerar specialfallet Fraunhofer-diffraktion: plan våg in & plan våg ut

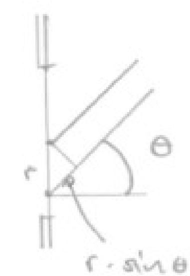
## Böjning i en spalt




Notera att $l >> b$
så relationerna i figuren
är helt annorlunda
än i verkligheten.
$\Rightarrow$ vinkeln från alla punkter
i spaltöppningen till P
är densamma.

Spalten består av små längdelement dr som
sänder ut sfäriska vågor.
Beräkna resulterande störningen i P!




Bidrag från dr vid $r = 0$

$$0 : \quad dy_0 = c \cdot dr \cdot \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right)$$

c är en konstant som visar hur starkt spalten
strålar per längdenhet.

Bidrag från dr på avståndet r från spaltcentrum

$$r : \quad dy_r = c \cdot dr \sin\left[\omega t - \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + 2\pi \frac{r \cdot \sin\theta}{\lambda}\right)\right]$$

Räkningarna blir enklare om vi först adderar
parvis symmetriskt belägna spaltelement

$$dy = dy_r + dy_{-r} = c \cdot dr \left\{ \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) + 2\pi \frac{r \cdot \sin\theta}{\lambda}\right] + \right.$$

$$\left. + \sin\left[\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) - 2\pi \frac{r \cdot \sin\theta}{\lambda}\right] \right\} =$$

$$= \left[ \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin\alpha \cos\beta \right] =$$

$$= 2 c \cdot dr \ \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \cos\left(2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right)$$

Nu tar vi med hela spalten genom att integrera från 0 till b/2. Notera att det bara är r som är variabel (förutom t)

$$Y_{tot} = \int_0^{b/2} dy = 2c \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{x}{\lambda}\right) \int_0^{b/2} \cos\left(2\pi \frac{s \cdot \sin\theta}{\lambda}\right) ds$$

$$= c \cdot b \frac{\sin\left(\frac{\pi b \cdot \sin\theta}{\lambda}\right)}{\frac{\pi b \cdot \sin\theta}{\lambda}} \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{\lambda}{b}\right)$$

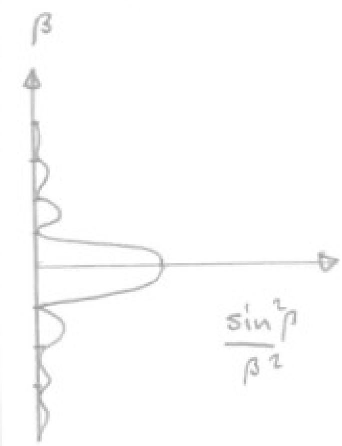
sätt $A_0 = c \cdot b$ och $\beta = \frac{\pi b \cdot \sin\theta}{\lambda}$

$$\therefore \; Y_{tot} = A_0 \frac{\sin\beta}{\beta} \sin\left(\omega t - 2\pi \frac{\lambda}{b}\right)$$

Vi har alltså en $\beta$-beroende (alltså $\theta$-beroende) amplitud

$$I \sim (\text{ampl.})^2$$

$$\Rightarrow \; I_\theta \sim A_0^2 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$




1) Rakt fram $\theta = 0 \Rightarrow \beta = 0$

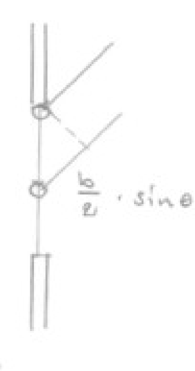
$$\lim_{\beta \to 0} \frac{\sin^2\beta}{\beta^2} = 1$$

$$\therefore \; I_\theta = I_0 \frac{\sin^2\beta}{\beta^2}$$

$I_0$ = intensitet rakt fram.

2) Nollställen: $\beta = m\pi \quad m = 1, 2, 3$

$$\beta = \pi \Rightarrow b \cdot \sin\theta = \lambda \Rightarrow \frac{b}{2} \cdot \sin\theta = \frac{\lambda}{2}$$

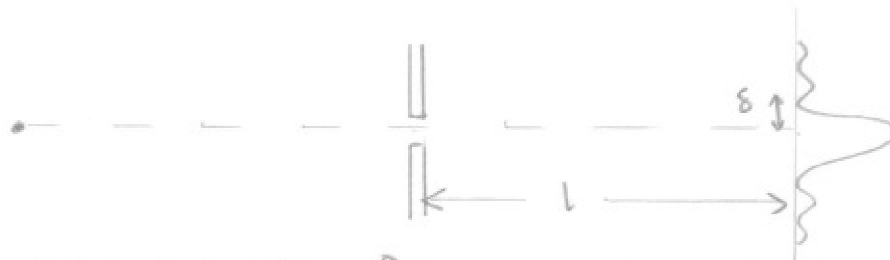



man kan para ihop spaltelement på avstånd b/2 från varandra som ger vågor som är i motfas till varandra.

Notera att stort b ger liten bredd på det centrala maximat.

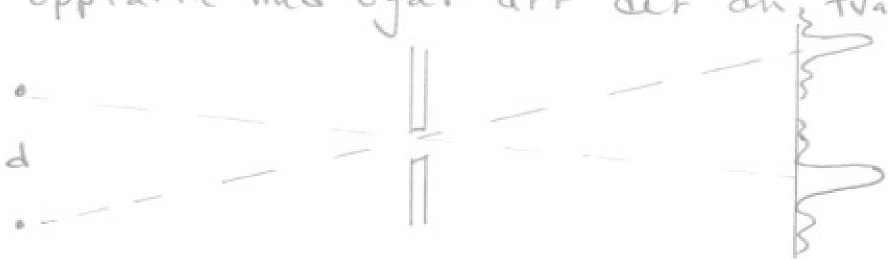
## Upplösningsförmåga.

Betrakta ett avlägset föremål (ex. en stjärna) genom en smal spalt. (ex ögat)




Ett punktformigt föremål ger upphov till en bild som är utbredd.

Antag att två stjärnor ligger nära varandra. Går det att uppfatta med ögat att det är två ljuskällor?




Om avståndet d minskar kryper intensitetsfördelningarna ihop mot varandra och till slut blir det svårt att avgöra om det är en eller två ljuskällor.

Gränsfall

Den enes maximum ligger rakt ovanför den andres 1:a minimum

Bildfläckens radie $\delta$:

$$\left.\begin{aligned} b \cdot \sin\theta &= \lambda \\ \sin\theta &\approx \frac{\delta}{l} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta = \frac{\lambda}{b} \cdot l$$

Med en cirkulär öppning blir härledningen mycket svårare. Diametern = D.

Slutresultat

$$\delta' = 1{,}22 \, \frac{\lambda}{D} \, l$$