

## Är pengar en gas?

Statistisk fysik tillämpad på ekonomiska system

Kandidatarbete vid institutionen för fysik

MAX PETER BEJMER  
CHARLOTTA BUSTRÉN  
LINN ENGSTRÖM

MARIE KORNELIUSSON  
SARA NORDIN HÄLLGREN  
ERIK WILLIAMSSON

KANDIDATARBETE TIFX04-17-30

# Är pengar en gas?

Statistisk mekanik tillämpad på ekonomiska system

MAX PETER BEJMER

CHARLOTTA BUSTRÉN

LINN ENGSTRÖM

MARIE KORNELIUSSON

SARA NORDIN HÄLLGREN

ERIK WILLIAMSSON



**CHALMERS**

CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA  
Göteborg, Sverige 2017

Är pengar en gas?  
Statistisk fysik tillämpad på ekonomiska system  
MAX PETER BEJMER  
CHARLOTTA BUSTRÉN  
LINN ENGSTRÖM  
MARIE KORNELIUSSON  
SARA NORDIN HÄLLGREN  
ERIK WILLIAMSSON

© MAX PETER BEJMER, CHARLOTTA BUSTRÉN, LINN ENGSTRÖM,  
MARIE KORNELIUSSON, SARA NORDIN HÄLLGREN, ERIK WILLIAMSSON, 2017.

Handledare: Mats Granath  
Examinator: Lena Falk  
Kandidatarbete TIFX04-17-30  
Institutionen för fysik  
Chalmers Tekniska Högskola

Vi vill tacka vår handledare Mats Granath för bra vägledning och synpunkter.

Framsida: Uppe till vänster ses resultatet från en simulering av en enkel modell av pengautbyte, med tillhörande exponentiella anpassning. Uppe till höger ses resultatet från en simulering av en skuldmodell, inspirerad av monetär ekonomisk teori, samt tillhörande exponentiella anpassningar. Nere till vänster ses resultatet från simulering av en beskattningsmodell, med tillhörande gammaanpassning. Nere till höger ses en korrelationsplott där individernas penninginnehav plottas mot deras sparandetendens, härrörande från en simulering där pengautbytet påverkas av varje individs penninginnehav. Typsatt i L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X Göteborg, Sverige 2017

## Sammanfattning

Verkligheten är full av komplicerade samband. Det är därför många gånger svårt att identifiera orsak och verkan inom ett komplext system. Ett exempel på ett sådant system är ekonomin, ett annat är en mängd växelverkande partiklar. De båda systemen har vissa saker gemensamt, däribland deras respektive storlek, och det ligger därför nära till hands att försöka tillämpa metoder från statistisk fysik även på det ekonomiska systemet. Det är ur ett samhällsperspektiv intressant att undersöka vilka parametrar som påverkar inkomstfördelningen i ett land. Detta arbete utnyttjar bland annat entropibegreppet för att förklara inkomstfördelningen teoretiskt utifrån givna förutsättningar. Numeriska simuleringar görs med samma syfte. Resultaten jämförs med tillgänglig inkomststatistik från Sverige och USA svarande mot ett antal olika beskattningsår. Fokus ligger på att påvisa de valda metodernas duglighet samt på att undersöka hur belåning och beskattning inverkar på inkomstfördelningen. Slutligen studeras vad som påverkar inkomstfördelningen hos de allra rikaste människorna i en population. Det visar sig att man, genom att ta hänsyn till vilka mikrotillstånd som är tillgängliga i det aktuella systemet, kan förklara välståndsfördelningens karaktär genom att maximera en modifierad form av entropin. Den föreslagna simuleringsmodellen visar sig i hög utsträckning stämma överens med verklighetens monetära fördelningar. Av detta framgår att vissa av den statistiska fysikens verktyg framgångsrikt kan användas för att undersöka även ett ekonomiskt system.

## Abstract

Reality is full of complicated correlations. This generally makes it hard to distinguish cause and effect within a complex system. One example of such a system is the economy; another is a multitude of interacting particles. These two systems have some common properties, such as their respective sizes, so it would be convenient to be able to apply methods from statistical physics to the economical system as well. From a societal perspective it is interesting to examine which parameters influence the income distribution of a country. In this thesis, the distribution of income is explained theoretically with given conditions, using the concept of entropy and similar notions. Numerical simulations are also performed for this purpose. The results are compared to available income statistics for Sweden and the United States for certain fiscal years. The focus lies on demonstrating the functionality of the chosen methods and on examining how loans and taxations affect the income distribution. Finally, an investigation is conducted regarding what influences the distribution of income among the very wealthiest of a population. It is shown that one can, by taking into account which microstates are accessible in a particular system, explain the nature of the distribution of wealth by maximizing a modified form of the entropy. The proposed simulation model proves to give a good estimate of real world monetary distributions. Hence it is evident that some of the tools from statistical physics can also be used to successfully examine an economical system.

Nyckelord: *statistisk fysik, econophysics, inkomstfördelning, entropi, simulering*

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Inledning</b>	<b>1</b>
1.1	Bakgrund . . . . .	1
1.2	Syfte . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Metod</b>	<b>2</b>
2.1	Avgränsningar . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Teoretisk bakgrund</b>	<b>4</b>
3.1	En kort introduktion till kombinatorik . . . . .	4
3.2	Jämviktsfördelning då entropin maximeras . . . . .	6
3.3	Koppling till ekonomiska system . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Den grundläggande modellen</b>	<b>9</b>
4.1	Simuleringsmodellens bakgrund och konstruktion . . . . .	9
4.1.1	Hur är denna modell representativ för ett stort ekonomiskt system?	10
4.1.2	Resultat av simulering . . . . .	10
4.2	Dataanpassning . . . . .	12
4.3	Sammanfattning och tolkning . . . . .	13
<b>5</b>	<b>Modeller med skuld</b>	<b>14</b>
5.1	Enkel agentbaserad modell med skuld . . . . .	14
5.1.1	Teori för enkel skuldmodell . . . . .	14
5.1.2	Simuleringsmodell . . . . .	15
5.1.3	Resultat av simulering . . . . .	15
5.2	Realistisk penningmodell . . . . .	16
5.2.1	Teori för monetär ekonomi med statistisk mekanik . . . . .	16
5.2.2	Hur banker skapar pengar . . . . .	18
5.3	Simuleringar: monetär utlåning . . . . .	19
5.3.1	Monetärt system med utlåning . . . . .	19
5.3.2	Resultat av simulering . . . . .	20
5.4	Dataanpassning . . . . .	22
5.5	Diskussion för modeller med skuld . . . . .	23
5.5.1	Olika visualiseringar av delsystem inom belåning . . . . .	23
5.5.2	Diskussion av enkel agentbaserad skuldmodell . . . . .	23
5.5.3	Diskussion av monetär utlåningsmodell . . . . .	23
5.6	Sammanfattning och tolkning . . . . .	24
<b>6</b>	<b>Beskattning</b>	<b>25</b>
6.1	Beskattning påverkar mikrotillståndens tillgänglighet . . . . .	26
6.2	Ginikoefficienten – ett mått på ekonomisk jämlikhet . . . . .	27
6.3	Agentbaserad modell: beskattning . . . . .	27
6.3.1	Inkomstskatt . . . . .	27
6.3.2	Förmögenhetsskatt . . . . .	28
6.4	Simulerade resultat: beskattning . . . . .	28
6.4.1	Inkomstskatt och bidrag . . . . .	29
6.4.2	Förmögenhetsskatt och bidrag . . . . .	30
6.5	Dataanpassning . . . . .	32
6.6	Sammanfattning och tolkning . . . . .	34

<b>7</b>	<b>Tvåklassamhälle och Paretofördelningen</b>	<b>35</b>
7.1	Paretofördelningen . . . . .	35
7.2	Agentbaserad modell . . . . .	36
7.3	Resultat - agentbaserad modell . . . . .	37
7.3.1	Simulering 1: Alla agenter har samma sparandetendens . . . . .	37
7.3.2	Simulering 2: Likformigt fördelad sparandetendens . . . . .	39
7.3.3	Simulering 3: En viss andel har likformig sparandetendens . . . . .	40
7.3.4	Resultat och sammanfattning för de tre simuleringarna . . . . .	41
7.4	Tolkning av simulering: varför uppkommer Pareto-distributionen? . . . . .	42
7.5	Dataanpassning . . . . .	42
7.6	Sammanfattning och tolkning . . . . .	43
<b>8</b>	<b>Diskussion och slutsats</b>	<b>45</b>
8.1	Diskussion av framtagna modeller . . . . .	46
8.2	Förslag på vidare studier . . . . .	47
8.3	Slutsats . . . . .	47
<b>A</b>	<b>Härledning av uttryck för multipliciteten</b>	<b>i</b>
<b>B</b>	<b>Maximering av lagrangianen</b>	<b>ii</b>

# 1 Inledning

## 1.1 Bakgrund

Genom historien har man sökt efter ett sätt att beskriva en monetär ekonomi. Det är i synnerhet av stort intresse att förstå vilka ekonomiska krafter som styr monetärt välstånd i länder. Stort arbete har lagts ned på att utveckla diverse teorier och modeller, bland annat för hur pengar fördelar sig i samhället. Trots detta är många aspekter och fenomen i ekonomin svåra att greppa. Dessutom förändras ekonomin med samhället och dess utveckling. Vad som påverkar ekonomin idag är inte detsamma som för 20 år sedan, så det krävs ständigt nya verktyg för att förstå vilka krafter som påverkar välstånd. Med bakgrund i detta började en idé formas redan i början på 1900-talet, om att applicera matematik, med koppling i fysik, på monetär ekonomi [1]. Tanken var att metoder hämtade från fysikens värld också skulle kunna användas för att lösa problem av ekonomisk karaktär.

Econophysics är än idag ett omtvistat fält. Medan fysiker gärna ser möjligheter till nya tillämpningar av sina metoder och betraktelsesätt, är många ekonomer skeptiska. Man anser att fysikerna tar sig vatten över huvudet och i alltför hög utsträckning uttalar sig om ett ämne man alls inte känner till [2]. Många kan nog dessutom tycka att det spontant känns långsökt att teori som utvecklats för att beskriva fysikaliska system, såsom gaser, kan tillämpas på kapital och kapitalflöden. Det är därför viktigt att poängtera att econophysics grundar sig på viljan att applicera tankemönster och metoder från fysikens värld på ekonomiska problem, snarare än att dra direkta paralleller mellan begrepp från de olika fälten. Sedan vissa avgränsande antaganden gjorts visar det sig att systemen har många gemensamma egenskaper. Statistisk fysik är, precis som ekonomi, ett område där matematisk statistik med fördel kan tillämpas på grund av systemens storlek. Till följd därav, gäller att man genom att hämta inspiration från de fysikaliska metoderna även kan lära sig något om beteenden hos det ekonomiska systemet. Utbyter personer i ett ekonomiskt system pengar med varandra slumpmässigt kan detta liknas vid gaspartiklar som kolliderar och utbyter energi. Det ekonomiska systemet, liksom gasen, kommer då sträva efter att maximera entropin. En följd av detta är att pengar fördelar sig över en befolkning på ungefär samma sätt som energi fördelar sig över en gas [3]. Därmed finns en ny, relativt outforskad, möjlighet till förbättring av existerande ekonomiska modeller.

## 1.2 Syfte

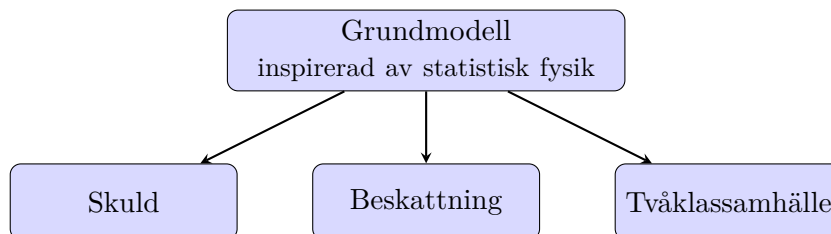
Detta arbete syftar till att visa på hur metoder, inspirerade av statistisk fysik, framgångsrikt kan användas för att beskriva monetära välstånd. Fokus är att, genom modifiering av entropibegreppet, utveckla simuleringsmodeller för att kunna förklara vilka krafter som styr de monetära fördelningarna i samhället. Målet är att förklara redan existerande monetära välståndsfördelningar i länder som USA och Sverige med hjälp av framtagen teori och agentbaserade modeller.

## 2 Metod

Som nämns ovan syftar detta arbete till att, med hjälp av metoder hämtade från den statistiska fysiken, undersöka monetära fördelningar i ekonomiska system. Förutom analys av befintlig inkomststatistik skapas även matematiska modeller som genom simulering används för att dra slutsatser kring vilka krafter som påverkar den monetära fördelningens utseende. Efter att entropibegreppet införts kan de uppkomna stationärfördelningarna motiveras analytiskt genom maximering av just entropin. Denna teknik är direkt hämtad från den statistiska fysiken.

Inledningsvis definieras och förklaras viktiga begrepp så som entropi och multiplicitet genom ett exempel hämtad från den statistiska fysiken. Därefter motiveras varför det är användbart att tala om de två storheterna även för ett ekonomiskt system. Viktiga avgränsningar påpekas, samtidigt som paralleller dras mellan det fysikaliska och det ekonomiska systemet. Sedan detta är gjort betraktas en enkel inledande modell för slumpmässigt pengautbyte, se kapitel 4. Kortfattat går denna grundmodell ut på att betrakta ett system där agenter slumpmässigt utbyter pengar med varandra. Intressant är att studera hur pengarna i slutändan fördelar sig om transaktionerna tillåts fortgå under en längre tid. Paralleller kan dras till statistisk fysik och termodynamik, där man studerar hur energi fördelar sig över atomer i en gas. Utgångspunkten i båda fallen är att betrakta sannolikheter och vad som är den statistiskt mest sannolika distributionen utifrån de givna förutsättningarna. En hjälp i detta är att betrakta entropin, då den mest sannolika fördelningen maximerar denna.

Genom modifiering av de uppsatta ramarna för den grundläggande modellen grenar arbetet därefter ut sig i tre huvudsakliga delområden enligt fig. 1. Deras gemensamma nämnare är att de alla är tydligt kopplade till den ursprungliga fysikrelaterade teorin och dess tillhörande modell. På så sätt bidrar de enskilda fokusområdena till att uppnå det mål som satts upp för arbetet, det vill säga att förklara fenomen i ekonomin med begrepp tagna från statistisk fysik.



Figur 1: Schematisk bild över arbetets innehåll. Initialt ställs en grundläggande modell över pengautbyte upp. Denna har mycket gemensamt med den statistiska fysikens modeller för energiutbyte mellan partiklar. Därefter manipuleras den ursprungliga modellen i syfte att förstå dynamiken bakom skuld respektive beskattning, samt den särskilda monetära inkomstdistributionen hos de absolut rikaste.

Det första delområdet som diskuteras är skuld, se kapitel 5. Här undersöks hur den monetära distributionen påverkas om agenterna tillåts skuldsättas. Eftersom negativa saldon nu är möjliga, måste entropin definieras om. Maximering av denna nya entropi leder till nya välståndsdistributioner, vilka tas fram analytiskt såväl som genom simuleringar. Därefter undersöks i kapitel 6 hur beskattning påverkar den monetära fördelningen. Det konstateras att införandet av skatt påverkar tillgängligheten hos de olika tillstånden på ett sådant sätt att den ursprungliga entropin återigen måste modifieras. Denna nya entropi används sedan för att prediktera och motivera det ungefärliga utseendet hos den monetära



distributionen sedan skatt införts. Slutligen görs i kapitel 7 en djupdykning i hur pengar utbyts för de absolut rikaste procenten i en population. Det har av andra konstaterats att de monetära tillgångarna för dessa procent följer en annan distribution än vad de gör hos den övriga populationen [4]. Denna speciella fördelning kallas för Paretdistributionen. Grundsimpleringens utbytesregler manipuleras ännu en gång, detta för att försöka finna sådana regler att simuleringen ger upphov till just en Paretofördelning.

För att underlätta för läsaren följer samtliga tre delområden samma struktur om fyra steg där analytiska, numeriska och statistiska metoder kompletterar varandra.

1. **Teoretisk härledning** där matematiken bakom det aktuella fenomenet beskrivs grundligt. I denna fas ställs eventuella analogier eller skillnader mellan fysik och ekonomi upp samtidigt som antaganden motiveras. På så sätt erhålls inkomstdistributionen analytiskt.
2. **Agentbaserad simulering** av det aktuella fenomenet. Genom att manipulera utbytesreglerna blev det tydligt vilken betydelse olika parametrar och utbytesmönster har för den uppkomna fördelningen. Därmed har slutsatser kunnat dras angående vad som styr pengars fördelning i verkligheten.
3. **Anpassning av statistisk data** över inkomster, hämtad från Statistiska Centralbyrån eller liknande myndighet. Sedan data från verkligheten i någon mån kan ses som ett facit syftar denna arbetsfas till att bevisa att inkomstfördelningen följer de teoretiskt förutspådda resultaten. Dataanpassningen har utförts med hjälp av Matlab.
4. **Sammanfattning och tolkning** av resultat från både statistisk dataanpassning och från simulering.

Arbetet avslutas med en mer övergripande diskussion, där återkoppling mellan resultat och syfte görs.

## 2.1 Avgränsningar

En viktig avgränsning är ursprunget för den statistik som använts vid dataanpassningarna. Inkomststatistik från Sverige och USA har tagits i beaktande, detta då det anses vara mer säkert att betrakta två inkomstdistributioner än bara en. Valet av länder grundar sig delvis i tillgången på inkomstdata. Genom att jämföra ländernas respektive inkomstfördelningar erhålles en bra bild av vilka krafter som påverkar distributionernas utseende. Utöver inkomstfördelningar berörs förmögenhetsstatistik över svenska kommuner. Centralt för den inledande teoretiska härledningen är antagandet att varje land ses som ett slutet system. Detta då det i en grundläggande modell inte är intressant att studera pengars fördelning över en ekonomi om en väsentlig mängd pengar kan läcka ut från systemet. Eftersom det system som behandlas som isolerat kan väljas godtyckligt, och till exempel innefatta hela världen, kan denna generalisering göras utan inskränkning.

### 3 Teoretisk bakgrund

Denna inledande teoridel syftar till att förklara begreppet entropi och vilken roll den spelar hos ett storskaligt system. Centralt i denna studie är energifördelningen hos en mängd partiklar, vilken följer av det mest sannolika tillståndet för systemet. Detta tillstånd uppnås vid största möjliga entropi. Nedan ges en grundläggande förklaring för detta fenomen och dess betydelse för partiklarna i en gas. Inledningsvis betraktas här energinivåerna hos en så kallad Einsteinsolid. Syftet med detta är att ge en kombinatorisk introduktion till begreppen mikrotillstånd, makrotillstånd och multiplicitet, samt visa hur dessa relaterar till entropin hos ett system. Fokus är inte att gå in djupare på hur den harmoniska oscillatoren fungerar rent fysikaliskt utan endast att se den som en energilagrarare med ekvidistanta energinivåer. Med grund i detta exempel noteras att ett systems stationärtillstånd är det makrotillstånd som har högst entropi, en slutsats som möjliggör härledningen av den exponentiella Boltzmannfördelningen. Eftersom denna härledning endast bygger på kombinatorik går det sedan att motivera hur ett analogt tankesätt medför att Boltzmanns distribution även kan användas för att beskriva storskaliga ekonomiska system.

#### 3.1 En kort introduktion till kombinatorik

För att förklara begreppet multiplicitet betraktas en Einsteinsolid bestående av  $N$  numrerade harmoniska oscillatorer. En harmonisk oscillator har diskreta ekvidistanta energinivåer betecknade med  $\epsilon_m$ , där  $m = 0, 1, 2, \dots$  och  $\epsilon_0$  är energin för grundtillståndet. Låt oss betrakta ett system med  $M$  excitationer. Detta ger följande tvång för systemet:

$$N = \sum_{m=0}^M N_{\epsilon_m}, \quad E = \sum_{m=0}^M \epsilon_m N_{\epsilon_m}, \quad (1)$$

där  $N_{\epsilon_m}$  betecknar antalet oscillatorer med energi  $\epsilon_m$  och  $E$  är systemets totala energi. Då energinivåerna,  $\epsilon_m$ , är diskreta och ekvidistanta kan  $\epsilon_m$  beskrivas av antalet energikvanta  $m$  som finns i en viss oscillator. Av detta följer att  $N_{\epsilon_m}$  lättare kan skrivas  $N_m$  och ekv. (1) kan skrivas som

$$N = \sum_{m=0}^M N_m, \quad E = \sum_{m=0}^M m N_m,$$

där  $m$  är av storheten energi. Nu presenteras ett konkret exempel med en Einsteinsolid där  $N = 3$  och  $M = 3$ . I tabell 1 nedan redovisas alla möjliga kombinationer som kan uppstå i systemet.

Tabell 1: Här beskrivs en Einsteinsolid med  $N = 3$  och  $M = 3$ , där de inringade siffrorna betecknar oscillatorerna. Med  $N_i$  avses antalet oscillatorer med  $i$  energikvanta vardera. Systemets tre energikvanta kan fördelas över de tre oscillatorerna på 10 olika sätt som visas här nedan. Dessa tio kombinationer är uppdelade vertikalt i tre olika grupper efter hur många energikvanta som finns i varje oscillator. Antalet permutationer i varje grupp,  $\Omega$ , har skrivits ut till höger i tabellen.

	①	②	③	
$N_1 = 3$	1	1	1	$\Omega = 1$
$N_0 = 2, N_3 = 1$	3	0	0	
	0	3	0	$\Omega = 3$
	0	0	3	
$N_0 = 1, N_1 = 1, N_2 = 1$	0	1	2	
	0	2	1	
	1	0	2	
	1	2	0	$\Omega = 6$
	2	0	1	
	2	1	0	

Med hjälp av tabell 1 ges nu en förklaring till begreppen mikrotillstånd, makrotillstånd och multiplicitet. De 10 olika kombinationerna i tabellen kallas **mikrotillstånd**. För att specificera ett mikrotillstånd för Einsteinsoliden måste vi veta hur många energikvanta som befinner sig i var och en av de numrerade oscillatorerna. Om vi istället vill specificera Einsteinsolidens tillstånd mer allmänt, genom att bara säga *hur många* oscillatorer som har 0, 1, 2 respektive 3 energikvanta, kallas detta ett **makrotillstånd**. Genom att känna till vilket mikrotillstånd som gäller för systemet går det alltid att säga vilket makrotillstånd det befinner sig i. Till exempel motsvarar det näst översta mikrotillståndet i tabellen, 3-0-0, makrotillståndet med  $N_0 = 2, N_3 = 1$ . Det motsatta gäller dock i regel inte: om vi endast vet att exakt en oscillator har tre energikvanta går det fortfarande inte att säga något om den individuella energinivån för varje oscillator, då det finns tre mikrotillstånd som svarar mot detta makrotillstånd [5]. Antalet mikrotillstånd som svarar mot ett givet makrotillstånd kallas för makrotillståndets **multiplicitet**, 3 i detta fall. Multipliciteten betecknas med  $\Omega$  och har skrivits ut till höger i tabellen för vart och ett av de tre makrotillstånden. Då  $\Omega$  visar på hur många sätt ett visst makrotillstånd kan uppkomma är den ett direkt mått på hur sannolikt detta makrotillstånd är. Sannolikheten fås som vanligt genom

$$P = \frac{\text{antal lyckade utfall}}{\text{antal möjliga utfall}} . \quad (2)$$

Från ekv. (2) och med multipliciteterna  $\Omega$  från tabell 1 ovan samt att det totala antalet mikrotillstånd är 10, fås sannolikheterna för Einsteinsolidens olika makrotillstånd enligt följande:

$$\begin{aligned} P(N_1 = 3) &= 1/10 \\ P(N_0 = 2, N_3 = 1) &= 3/10 \\ P(N_0 = 1, N_1 = 1, N_2 = 1) &= 6/10 . \end{aligned}$$

Detta visar att det minst sannolika makrotillståndet är det där energikvantumerna är fördelade jämnt över oscillatorerna. Makrotillståndet där de tre oscillatorerna har 0, 1 respektive 2 energikvantum vardera är det mest sannolika. Vid en återblick till tabell 1 bekräftas detta; mikrotillståndet  $N_1 = 3$  kan bara uppkomma på ett sätt och bör därför vara minst sannolikt. Slutsatsen att ett makrotillstånd med hög grad av "jämlighet" generellt sett är mycket osannolikt är grundläggande i detta arbete. Nu betraktas ett allmänt fall: en Einsteinsolid med  $N$  oscillatorer och  $M$  energikvanta. Även här är det intressant att fastställa multipliciteten för ett givet makrotillstånd, med en viss uppsättning av  $N_m$ . Då  $M$  energikvanta ska placeras ut över  $N$  nummerade oscillatorer följer formeln för multipliciteten kombinatoriskt:

$$\Omega = \frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_M!} . \quad (3)$$

Denna formel härleds i Appendix A. Nästa steg är att beskriva hur mer komplicerade system beter sig. Genom att studera energiutbyten mellan två växelverkande Einsteinsolider kommer man fram till att det spontana energiflödet avstannar när ett system når sitt mest sannolika makrotillstånd. Fluktuationer kring detta jämviktsläge är möjliga, men är ofta för små för att mätas. Denna lag om ökande multiplicitet är en version av den välkända termodynamikens andra huvudsats. Viktigt att notera är att detta är ett konstaterande om att det är otroligt osannolikt att ett system skulle bete sig på något annat sätt. Påståendet blir ännu starkare för mycket stora system [5].

För att finna stationärtillståndet för ett givet isolerat system räcker det alltså att identifiera det makrotillstånd som har högst multiplicitet. Att explicit beräkna sannolikheterna blir överflödigt. Eftersom multipliciteter för större system blir *mycket* stora tal, som är svåra att arbeta med även med datorhjälp, logaritmeras multipliciteten. Detta ger en storhet av mer hanterbar storlek. Logaritmen av multipliciteten kallas entropi,  $S$ , och för att ge rätt enhet multipliceras den även med Boltzmanns konstant  $k_B$ . Formeln för entropi hos ett slutet isolerat system är därmed

$$S = k_B \ln(\Omega) .$$

Då logaritmen är en monotont växande funktion kommer maximering av entropin implicera maximering av multipliciteten. Taget ur detta sammanhang, är entropi en tillståndsfunktion som ger ett mått på hur "oordnat" ett system är; entropin är noll i en Einsteinsolid vars energikvanta är precis jämnt fördelade över oscillatorerna. Allt eftersom ett system blir mindre välordnat så stiger dess entropi, samtidigt som systemet blir mer stabilt [5].

Vidare i arbetet kommer Boltzmanns konstant sättas till  $k_B = 1$ . Entropin kommer endast vara ett mått på multiplicitet för kommande system, därmed kommer själva enheten för storheten inte vara av intresse. Hädanefter används en ny entropi som definieras

$$S = \ln(\Omega) . \quad (4)$$

### 3.2 Jämviktsfördelning då entropin maximeras

Målet med detta avsnitt är att finna en statistisk jämviktsfördelning genom att maximera entropin, ekv. (4). Omskrivning av denna ekvation med hjälp av vanliga logaritmlagar ger

$$S = \ln(\Omega) = \ln\left(\frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_M!}\right) = \ln(N!) - \ln(N_0!) - \dots - \ln(N_M!) .$$

Stirlings formel lyder som bekant

$$\ln(x!) \approx x \ln(x) - x ,$$

där uttrycken är så gott som ekvivalenta för stora  $x$ . Med definitionen av  $\Omega$  från ekv. (3) ovan är det nu möjligt att med hjälp av Stirlings formel härleda ett nytt uttryck för entropin  $S$ . Här antas  $N$  vara mycket stort och det går därmed att utan inskränkning använda strikt likhet i Stirlings formel:

$$S = (N \ln N - N) - (N_0 \ln N_0 - N_0) - \dots - (N_M \ln N_M - N_M)$$

$$\Rightarrow S = N \ln N - N_0 \ln N_0 - \dots - N_M \ln N_M - N + N_0 + \dots + N_M .$$

Definitionen av  $N$  ger

$$N \equiv \sum_{m=0}^M N_m = N_0 + \dots + N_M$$

$$\Rightarrow S = N \ln N - N_0 \ln N_0 - \dots - N_M \ln N_M = N \ln N - \sum_{m=0}^M N_m \ln N_m .$$

Eftersom alla mikrotillstånd antas lika sannolika, är sannolikheten att observera en specifik uppsättning  $N_m$  proportionell mot antalet möjliga mikroskopiska realisationer av denna uppsättning. Sannolikheten är alltså proportionell mot  $\Omega$ . Slutsatsen kan då dras att den mest sannolika uppsättningen av  $N_m$  är den som maximerar  $\Omega$  under vissa förutsättningar. Detta är analogt med att maximera  $S$  då logaritmen är en monotont växande funktion. För ett slutet system kan det antas att antalet atomer samt den totala energin är fixa, enligt ekv. (1) ovan. För att lösa detta optimeringsproblem och samtidigt implementera dess avgränsningar införs Lagrangemultiplikatorerna  $\alpha$  och  $\beta$ . Med hjälp av dessa konstrueras Lagrangianen  $L$  enligt

$$L = S + \alpha \sum_{m=0}^M N_m - \beta \sum_{m=0}^M m N_m .$$

Extrempunkter fås nu genom  $\frac{\partial L}{\partial N_m} = 0 \quad \forall N_m$ . Enligt härledning i appendix B blir resultatet:

$$\ln N + 1 - \ln N_m - 1 + \alpha - \beta m = 0$$

$$\Rightarrow \ln \frac{N_m}{N} = \alpha - \beta m \Rightarrow \frac{N_m}{N} = e^{\alpha - \beta m} .$$

Det går därmed att dra slutsatsen att det relativa ockupationstalet  $P(m) = \frac{N_m}{N}$  för tillstånd  $m$  beror exponentiellt av tillståndets energi  $m$ . För att få en ekvation med tydligare fysikaliska tolkningar skrivs nu

$$P(m) = \frac{N_m}{N} = e^{\alpha - \beta m} = e^{-(m-\mu)/T} , \quad (5)$$

där parametrarna  $T = \frac{1}{\beta}$  och  $\mu = \alpha T$  kan liknas vid temperatur och den så kallade kemiska potentialen (som ej är viktig i detta sammanhang) för systemet. Värdena på  $\alpha$  och  $\beta$  kan nu bestämmas genom att substituera ekv. (5) i ekv. (1) och se till att villkoren är uppfyllda för givna  $N$  och  $E$ :

$$1 = \sum_{m=0}^M e^{\alpha - \beta m}$$

$$\frac{E}{N} = \sum_{m=0}^M m e^{\alpha - \beta m} ,$$

som kan lösas explicit för ett system med givna uttryck för  $m$ . Sannolikheten för att en atom ska befinna sig i ett tillstånd med energi  $m$  är enligt ekv. (5) proportionell mot

energin, det vill säga  $P(m) \propto e^{-m/T}$ . Med detta i åtanke går det att generalisera  $m$  till en kontinuerlig variabel, vilket medför att alla summor i härledningen ersätts med motsvarande integraler. Då  $P(m)$  avtar mycket snabbt med  $m$  kommer sannolikheten för tillstånd med höga energier i princip vara obefintlig. Då  $M \rightarrow \infty$  kommer de sista termernas bidrag till sannolikhetsfördelningen vara minimal och denna utökning kan därför göras utan inskränkning.

Sannolikheten som erhålls i ekv. (5) kallas Boltzmannfördelningen och är en av de fundamentala lagarna inom området för studier av statistisk fysik i jämviktstillstånd. Då dess härledning endast bygger på sannolikhetslära kan den användas för att beskriva statistiska system i allmänhet, till exempel en ekonomisk marknad med många agenter. Inom en ekonomi är det uppenbart att varje aktör är urskiljbar från sin omgivning tack vare sin mänskliga identitet. Här är det lämpligt att använda Boltzmannfördelningen, som tar hänsyn till att man vill hålla isär aktörerna i systemet.

### 3.3 Koppling till ekonomiska system

Energifördelningen över en klassisk gas är kontinuerlig, men korrelerar mot Boltzmannfördelningen precis som energin i en Einsteinsolid. Trots att det handlar om ett helt annat typ av system, visar det sig att ett system av agenter som slumpmässigt utbyter pengar med varandra kommer bete sig liknande. Eventuella motiveringar till antagandens rimlighet kommer utvecklas i följande kapitel där studiens grundmodell presenteras.

I denna analogi antas gaspartiklarna motsvara agenter med tillgångar och den totala energin motsvaras av den totala mängden pengar i systemet. Två viktiga antaganden som krävs är att mängden pengar är bevarad och att systemet har nått jämvikt, alltså sitt mest sannolika tillstånd. Om inget annat specificeras får alltså mängden pengar som cirkulerar i systemet antas vara bevarad, inget tillförs eller förloras. Enda sättet för gaspartiklar, i ett slutet system, att ändra sin energi är att kollidera och utbyta energi med en annan partikel. Likaså skapar individer i ett samhälle inte pengar själva utan inkomst erhålles genom transaktion med andra individer.

Att fördelningen är stationär och därmed inte förändras mycket i tiden, annat än en mycket långsam ökning av medelinkomsten till följd av inflation, är ett beteende som observerats i tidigare studier av inkomstfördelningar över långa perioder [3]. Ett undantag för jämviktsvillkoret tas upp i kapitel 7. Här diskuteras inkomstfördelningen hos de få procent som har allra högst inkomst och varför de kan avvika från den grundmodell som presenteras i nästa kapitel.

För att systemet ska kunna nå jämvikt krävs även ett randvillkor som begränsar agenternas saldo till enbart positivt. Detta motsvaras av att partiklarna i en gas alltid har positiv energi. Undantaget för detta villkor är modellen med skuld i kapitel 5, där lån och dess påverkan på ekonomin studeras. Skulden i den här modellen kommer däremot alltid att vara begränsad.

## 4 Den grundläggande modellen

I föregående kapitel, kapitel 3, betraktades en Einsteinsolid bestående av  $N$  oscillatorer vilka kunde exciteras av diskreta energikvanta. Det undersöktes hur den totala energin fördelade sig över oscillatorerna. Detta gjordes genom maximering av entropin,  $S = \ln(\Omega)$ , under bivillkoren att antalet oscillatorer liksom den totala energin var konstant. Multipliciteten,  $\Omega$ , gavs av uttrycket

$$\Omega = \frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_M!} . \quad (6)$$

Detta resulterade i ett uttryck för fördelningsfunktionen  $P(m)$  sedan systemet uppnått statistisk jämvikt och därmed uppnått sitt mest sannolika tillstånd. Funktionen  $P(m)$  ges av uttrycket

$$P(m) = \frac{N_m}{N} = e^{\alpha - \beta m} = e^{-(m - \mu)/T} \quad (7)$$

och beskriver sannolikheten att någon oscillator innehar exakt  $m$  energikvanta. Denna sannolikhet avtar exponentiellt med antalet energikvanta. Vad som nu är intressant, och vad detta arbete syftar till, är att tillämpa dessa teorier på ekonomiska system. Så istället för att betrakta en Einsteinsolid med oscillatorer och energikvanta ska nu ett ekonomiskt system med agenter och pengar betraktas. Matematiskt är skiftet enkelt att genomföra då oscillator och agent respektive energikvanta och pengar kan översättas direkt mot varandra. Härledningen i kapitel 3 kan alltså appliceras rakt av på det ekonomiska system man väljer att betrakta. Detta betyder att då fördelningen av pengar över agenter undersöks så väntas samma exponentiella fördelning som i ekv. (7). Denna ekvation skrivs nu om till

$$P(m) = \frac{1}{Z} e^{-m/T_m} , \quad (8)$$

där  $P(m)$  är sannolikheten att finna en agent med  $m$  pengar.  $Z$  är en normeringsfaktor, även kallad partitionsfunktionen, och är summan av alla tillstånd:

$$Z = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-m/T_m} .$$

Summan tas över alla tillgängliga tillstånd. Pengatemperaturen,  $T_m$ , definieras som medelkapitalet för varje agent. Enheten för pengatemperaturen är pengaenhet, till exempel kronor eller dollar.

I detta avsnitt föreslås en simuleringsmodell som modellerar slumpvis pengautbyte för en avgränsad population. Först motiveras antagandet att modellen är representativ för ett stort ekonomiskt system. Sedan presenteras resultatet av simuleringen och jämförs med den tidigare härledda exponentialfördelningen. Det undersöks också hur systemets entropi förändras då pengafördelningen blir alltmer stationär. Slutligen jämförs resultatet av simuleringen med aktuell data för ett riktigt ekonomiskt system: inkomststatistik från USA. Jämförelse mellan resultaten från simuleringen och dataanpassningen ger en god indikation på huruvida modellen stämmer överens med verkligheten.

### 4.1 Simuleringsmodellens bakgrund och konstruktion

Modellen går ut på att undersöka hur  $M$  pengaenheter fördelar sig över  $N$  agenter då allt pengautbyte sker slumpmässigt. Notera att  $M$  för simuleringsmodellen är ändligt, detta för att möjliggöra numerisk implementation. Inledningsvis fördelas pengarna jämnt så

att varje agent startar med ett kapital på  $m = M/N$ . Sedan utförs vid varje tidssteg en transaktion mellan två slumpvis utvalda agenter:

$$m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m \quad (9)$$

$$m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m, \quad (10)$$

där  $m_i(t)$  och  $m_j(t)$  är den  $i$ :te respektive  $j$ :te individens kapital vid tiden  $t$ .  $\Delta m$  är värdet av transaktionen mellan agent  $i$  och  $j$ . Transaktionerna kan betraktas som ett medel för distribuering av pengar. I och med att pengarna får möjlighet att omfördela sig genom transaktioner blir alla mikrotillstånd teoretiskt sett tillgängliga. Intressant är att undersöka huruvida det uppstår en stationär fördelning och hur den då ser ut. Värt att påpeka är att det totala antalet pengar i systemet,  $M$ , är konstant då inga nya pengar introduceras. Hur denna simulering kan modellera ett stort ekonomiskt system är inte uppenbart utan kräver vidare förklaring och argument. Dessa presenteras nedan.

#### 4.1.1 Hur är denna modell representativ för ett stort ekonomiskt system?

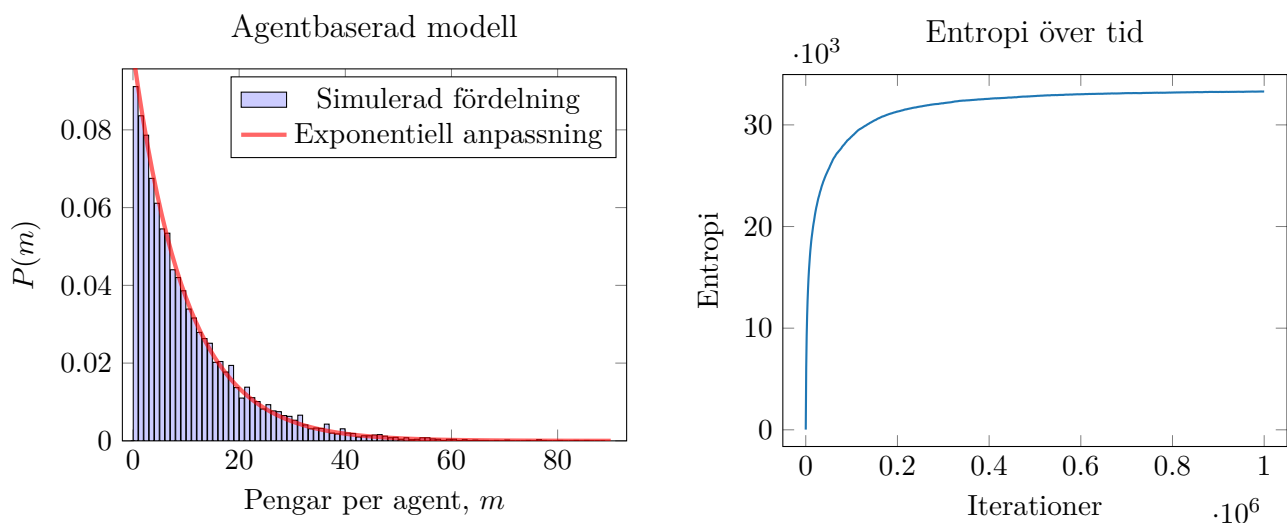
Simuleringen modellerar ett slutet ekonomiskt system med ett fixt antal agenter och en fix mängd pengar. Detta slutna system skulle till exempel kunna vara ett land med ett visst antal invånare och en fix summa pengar i omlopp.

Transaktioner av pengar (köp av varor och tjänster, utbetalning av löner med mera) antas ske helt slumpmässigt. Fullständigt slumpmässiga transaktioner implicerar att alla agenter har samma förutsättningar till att ge och att få pengar. Detta medför i sin tur att det mest grundläggande antagandet i den statistiska fysiken kan göras: alla tillgängliga mikrotillstånd är lika sannolika (för ett isolerat system i termisk jämvikt)[5]. Då detta gäller kan teorin om maximering av entropi tillämpas. Som vi har sett i kapitel 3 kan man genom att maximera entropin beräkna hur pengarna fördelar sig över agenterna på det mest sannolika sättet. Detta resulterar i en Boltzmannfördelad distribution, se ekv. (8).

#### 4.1.2 Resultat av simulering

Antalet agenter,  $N = 10\,000$ , och det totala antalet pengar,  $M = 100\,000$  pengaenheter, medför att varje agent initialt tilldelas  $\frac{100\,000}{10\,000} = 10$  pengaenheter. Värt att nämna är att entropin i detta öppningsskede är noll: Antalet agenter  $N_0, N_1, \dots, N_{100\,000} = 0, N_{10} = 10\,000$ . Insättning av detta i formeln för multipliciteten från ekv. (3) ger  $\Omega = 1$  vilket i sin tur ger  $S = 0$ . En transaktion utförs enligt ekv. (9) och för den aktuella modellen väljes  $\Delta m = 1$ . Ett bivillkor som införs är att en agent aldrig kan ge bort mer än vad den har i kapital, vilket medför att minsta möjliga värde på  $m$  är noll. För att en transaktion ska äga rum måste alltså  $m_j(t) > \Delta m$ . Simuleringen körs nu i 100 miljoner tidssteg i ett försök att uppnå den stationära fördelningen. Resultatet visas i fig. 2a. I fig. 2b illustreras hur entropin förändras med tiden.





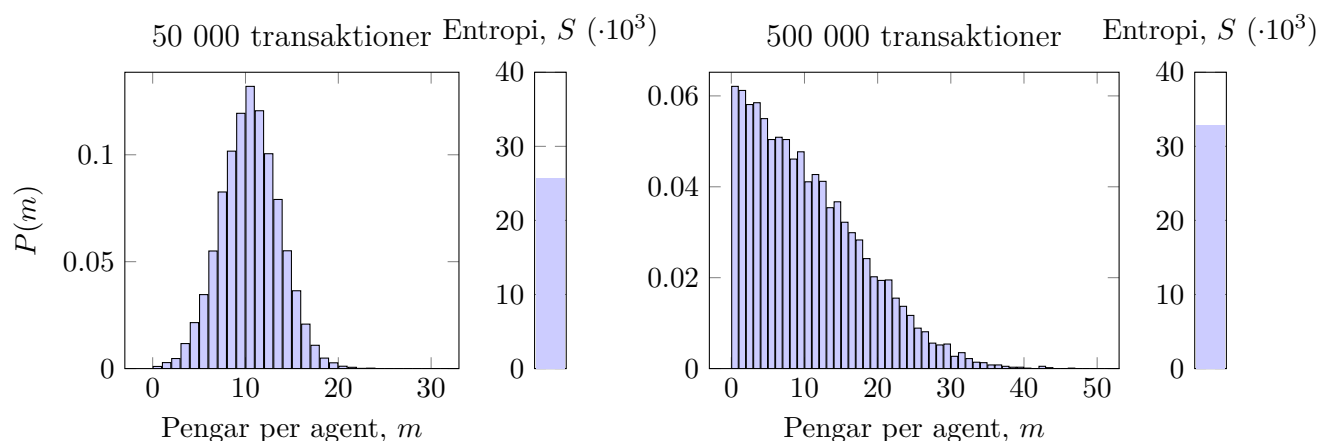
(a) Histogram över fördelningen av pengar efter 100 miljoner slumpmässiga transaktioner. Den exponentiella anpassningen är av formen  $0.1e^{-m/T_m}$ , för  $T_m = 10$  pengaenheter.

(b) Entropin,  $S$ , under förloppet av simuleringen. Att entropin ökar väldigt lite i slutet tyder på att en stationär fördelning har uppnåtts. Entropin har maximerats. Efter  $10^6$  iterationer sker ingen större förändring, det slutgiltiga värdet blir 33 458.

Figur 2: Simulering av en grundläggande agentbaserad modell över ett ekonomiskt system. Simuleringen kördes i  $10^8$  tidssteg (iterationer).

Det är tydligt att fördelningen i fig. 2a är exponentiell. En exponentiell anpassning är gjord med ekv.  $0.1e^{-m/T_m}$ ,  $T_m = 10$  pengaenheter. Entropin beräknas med uttrycken i ekv. (4), ekv. (6) och Stirlings approximation. I fig. 2b illustreras hur entropin ändras under simuleringens gång. Att entropiökningen avstannar beror på att en stationär fördelning har uppnåtts. Genom att endast betrakta entropiutvecklingen under simuleringen kan det konstateras att fördelningen har konvergerat. Slutvärdet av entropin, vilket är entropin för fördelningen i fig. 2a, blir  $S \approx 33458$ . Detta motsvarar ett värde på multipliciteten i storleksordning  $10^{15\ 000}$ . Tydligt är att entropin hela tiden ökar, och att maximal entropi uppnås när distributionen är exponentialfördelad, vilket stämmer överens med härledningarna i kapitel 3. Ju fler transaktioner, desto mer exponentialfördelad kommer fördelningen alltså att bli tills det att jämvikt uppstår.

Det är intressant att betrakta mer än bara start- och slutskedet av modellen för att undersöka hur fördelningen uppkommer över tid. I fig. 3 illustreras detta tillsammans med värdet på entropin för den specifika fördelningen.



(a) Histogram över fördelningen av pengar efter 50 000 transaktioner och entropin för den givna fördelningen.

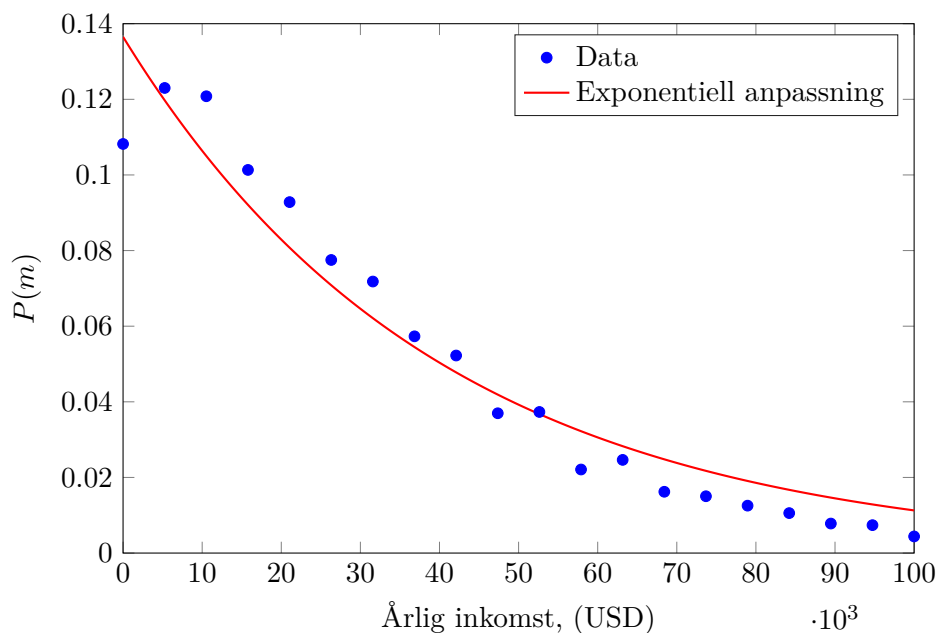
(b) Histogram över fördelningen av pengar efter 500 000 transaktioner och entropin för den givna fördelningen.

Figur 3: Histogram över fördelningen av pengar efter 50 000 respektive 500 000 transaktioner. Entropin för den givna fördelningen är också illustrerad. Observera skillnaden i skalningen mellan y-axlarna i fig. 3a och fig. 3b.

Simuleringen inleds med att alla agenter har 10 pengaeenheter vilket motsvarar en 1 enhet hög stapel vid värdet 10 på x-axeln. Direkt vid start kommer distributionen börja diffundera. I fig. 3a observeras hur en Gaussisk distribution uppstår på grund av detta. I och med att agenterna inte tillåts ha negativt saldo fungerar nollan som en slags barriär, som gör att antalet agenter börjar byggas upp mot den vilket ses i fig. 3b. Sedan formas sakta men säkert den slutgiltiga distributionen som kan observeras i fig. 2a.

## 4.2 Dataanpassning

Det är nu intressant att jämföra resultatet av simuleringen med statistik baserad på verklig data. Optimalt hade varit att titta på någon form av förmögenhetsfördelning, till exempel kontosalen för en stor bank. Sådan statistik är dock svår att få tag på. Om antagandet görs att personer med hög inkomst är förmögna och personer med låg inkomst är mindre förmögna så kan statistik över inkomster användas för samma syfte. Denna data är också mycket mer lättillgänglig. I fig. 4 illustreras inkomstfördelningen i USA år 2003. Datan är hämtad från den amerikanska statliga myndigheten US Census Bureau [6]. I figuren är också en exponentiell anpassning,  $0.14 \cdot e^{-m/T_m}$ , med  $T_m = 40112$  dollar, utritad. Inkomstfördelningen är inte helt exponentialfördelad men tendensen är tydlig. Den största missanpassningen är vid nollan, något som skulle kunna förklaras med att det är där skatter och bidrag har störst påverkan. En simuleringsmodell med skatt och bidrag behandlas i kapitel 6.



Figur 4: Sannolikhetsfördelning över inkomster i USA år 2003, med exponentialanpassning. Datan är från US Census Bureau [6] och avser total inkomst från tjänst, kapital och eventuella statliga bidrag för personer arton år eller äldre.

### 4.3 Sammanfattning och tolkning

I det här avsnittet har metoder och begrepp från statistisk fysik, såsom entropi och maximering av denna, använts som utgångspunkt vid undersökande av pengadistributioner för stora ekonomiska system. Den teoretiska härledningen i kapitel 3 och den simulerade modellen i fig. 2 resulterade båda i en exponentialfördelning, eller Boltzmannfördelning. Vid undersökning av inkomststatistik från ett riktigt ekonomiskt system finns tydliga tendenser till att även denna är exponentialfördelad. Detta styrker de framförda teoriernas riktighet. Modellen presenterad här är grundläggande och enkel i sin utformning, och den har vissa begränsningar. Genom att modifiera modellen skulle man kunna undersöka andra aspekter i ett ekonomiskt system. Ett sådant exempel är att agenterna tillåts ha negativa saldon för att undersöka begreppet skuld, vilket är en intressant tillämpning som kommer att presenteras i kapitel 5. En annan modifiering som kan göras är att införa yttre faktorer som jämnar ut fördelningen. Detta skulle kunna liknas vid skatter och bidrag och kommer att undersökas vidare i kapitel 6.

## 5 Modeller med skuld

För att kunna beskriva fallet när agenterna i grundmodellen från kapitel 4 tillåts ha negativa saldon betraktas hur välförhållningarna som observerades i avsnitt 4.1.2 påverkas när begreppet skuld införs. Skuld är ett fenomen som uppkommer när en individ i ett samhälle lånar pengar utöver sina tillgångar, vilket kan tolkas som att personer med skuld har negativa saldon. När detta inträffar kan man se det som att banken har skapat pengar som inte tidigare fanns. Det är i synnerhet skapandet av pengar som orsakar instabilitet i ett ekonomiskt system och har skapat vår tids största finansiella kriser [7].

Risken med skapandet av pengar är att en ekonomi snabbt kan få höga tillgångar utan underliggande värde. Om det ekonomiska systemet i fråga inte skapar något värde utan endast lever på lån fås en situation där mer lån måste tas. Detta kan leda till randvillkor där ekonomin tillåter obegränsade lån. Vid obegränsade skuldvillkor kan aldrig den agentbaserade modellen stabilisera sig och är således inte hållbar [7]. Detsamma gäller för en ekonomisk marknad. Av detta skäl tvingas banker ha en så kallad reserveringsgrad  $r$ , som anger den andel pengar banken måste ha tillgänglig av alla insättningar. Reserveringsgraden bestäms vanligtvis av landets centralbank och är en parameter som direkt påverkar vad som kan betraktas som landets skapande av pengar [8].

I avsnitten presenteras först en enkel agentbaserad skuldmodell där varje agent har ett maximalt lånebelopp. Senare utvecklas och utreds en mer komplicerad modell som tar hänsyn till reserveringsgraden  $r$ ; detta innebär att det finns ett skuldtak för hela ekonomin och inte bara på individnivå. Till sist anpassas data från Statistiska Centralbyrån [9] över Sveriges skulder till den senare modellen. Mycket intressant är att, genom simulerade modeller och anpassning av data, försöka fastställa hur reserveringsgraden  $r$  påverkar välförhållning och stabilitet i en ekonomi.

### 5.1 Enkel agentbaserad modell med skuld

I den agentbaserade grundmodellen från avsnitt 4.1 tillåts agenterna aldrig ha ett negativt saldo, det vill säga  $m \geq 0$  för alla agenter. I ett ekonomiskt system kan emellertid negativa saldon förekomma, vilket definieras som att man har mer skuld än finansiella tillgångar. För att göra en första realisering av detta villkor tillåts agenter med noll i saldo fortfarande utföra transaktioner. Detta medför ett negativt saldo för skuldsatta agenter. I detta avsnitt redovisas teori och utbytesregler för den enkla agentbaserade skuldmodellen. På slutet redovisas simulerade resultat från denna.

#### 5.1.1 Teori för enkel skuldmodell

Grunden för teorin i denna modell är densamma som i kapitel 4. Skillnaden är att agenterna nu tillåts ha negativa saldon, det vill säga  $m < 0$ . Detta påverkar inte uttrycket för multipliciteten  $\Omega$  från kapitel 4 eftersom tillstånden för negativa saldon behandlas på precis samma sätt som för positiva. Faktumet att uttrycket för multipliciteten inte har ändrats medför att exponentialfördelningen, ekv. (8), även denna gång uppkommer för agenternas tillstånd (saldon). Observera dock att den undre gränsen förskjutits och har blivit negativ istället för noll på grund av de negativa tillstånden.

Pengarna kommer fortfarande vara bevarade eftersom systemet är slutet och alla utbyten sker mellan två agenter. Detta innebär att väntevärdet  $\langle m \rangle$  är detsamma som fallet utan skuld, det vill säga  $T_m = \langle m \rangle$ , även sedan skuldbegreppet införts. För att se effekten av detta på fördelningen, begränsas skulden för varje agent till något  $m_d < 0$ . Väntevärdet

beräknas således enligt följande:

$$T_m = \langle m \rangle = \int_0^\infty m \frac{1}{Z} e^{-m/T_m} dm = \int_{m_d}^\infty m \frac{1}{Z'} e^{-m/\alpha} dm = \alpha + m_d$$

$$\implies \alpha = T_m - m_d .$$

Då  $m_d < 0$  kan  $\alpha$  skrivas som

$$\alpha = T_m + |m_d| ,$$

vilket innebär att den nya exponenten kommer minska i belopp när  $|m_d|$  blir större. Detta resulterar i att lutningen på fördelningen minskar när agenterna tillåts få negativa saldon. Ju större tillåten skuld, desto flackare blir fördelningsfunktionens lutning. Tillstånden svarande mot ett högre saldo kommer därför att bli mer sannolika på bekostnad av att negativa saldon nu existerar, se fig. 5 nedan. Ett viktigt randvillkor är att  $m_d$  är begränsad. Om  $m_d$  inte är begränsad kan agenterna skuldsättas oändligt och fördelningen divergerar. Detta kan förklaras av att tillståndssumman (partitionsfunktionen):

$$Z' = \sum_{m=m_d}^{\infty} e^{-m/\alpha} ,$$

divergerar när  $m_d \rightarrow -\infty$ . Man kan också använda resonemang direkt kopplade till simuleringsmodellen i avsnitt 5.1.2 om att agenterna aldrig når en barriär. Därför rör sig agenterna mot lägre saldon och når aldrig någon stationär punkt.

Man kan tänka sig att ett negativt saldo uppstår då en agent har mer skuld än finansiella tillgångar. Då är summan av alla negativa saldon lika med de totala lån som banker beviljat. Med detta tankesätt har man effektivt ökat antalet pengaeenheter med  $m_d$  för varje agent som har saldo  $> 0$ . Det är dock bättre att använda detta tankesätt i den realistiska utlåningsmodellen i avsnitt 5.2.1.

### 5.1.2 Simuleringsmodell

Simuleringen utförs så som tidigare beskrivits i avsnitt 4.1.2, med den enda skillnaden att randvillkoret för minsta saldot är satt till ett negativt värde  $m_d < 0$  istället för noll. Utbytet av pengar  $\Delta m$  blir då

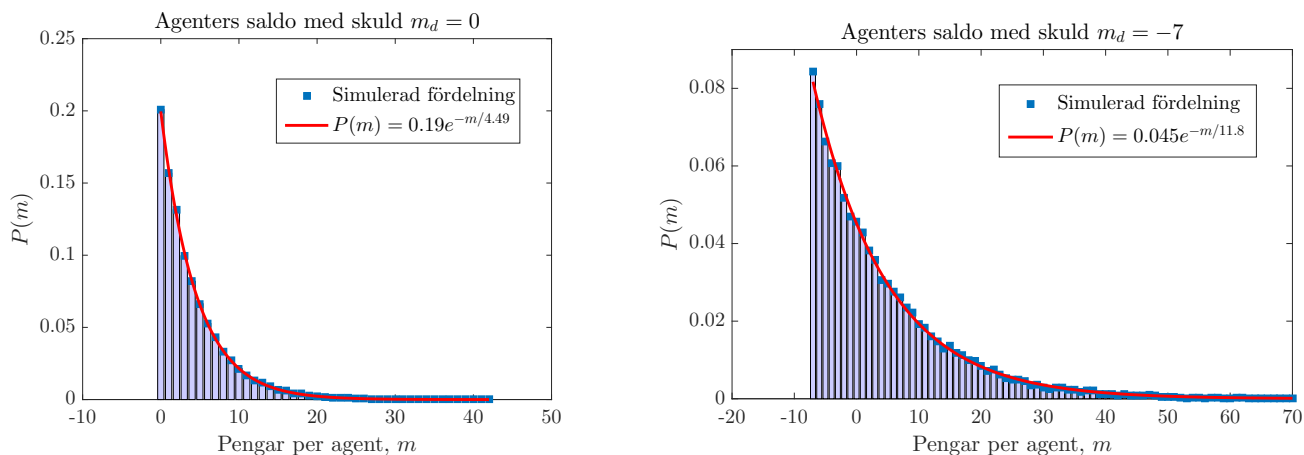
$$m_i(t+1) = m_i(t) + \Delta m$$

$$m_j(t+1) = m_j(t) - \Delta m .$$

Skillnaden är att den givande agenten  $j$  nu även kan ha saldo  $m_d < m_j(t) \leq 0$ , utöver de tillåtna (positiva) värdena från modellen i kapitel 4. Därmed kan det finnas agenter med negativa saldon som också måste räknas in när fördelningsfunktionen tas fram.

### 5.1.3 Resultat av simulering

Nedan i fig. 5 redovisas resultatet från de utförda simuleringarna av modellen från avsnitt 5.1. I simuleringen användes  $N = 20\,000$  agenter, vilka inledningsvis tilldelades  $m = 4$  pengaeenheter. Transaktionens storlek valdes precis som i kapitel 4 till  $\Delta m = 1$ . Antalet utförda iterationer var 10 miljoner.



(a) Agenteras saldo utan skuld,  $m_d = 0$  pengaeenheter. (b) Agenteras saldo med skuld,  $m_d = -7$  pengaeenheter.

Figur 5: Figurerna visar de stationärfördelningar som uppstår när den tillåtna skulden  $m_d$  ändras från 0 till  $-7$  pengaeenheter för varje agent. Här syns att de mest sannolika tillstånden är nära  $m = -7$  pengaeenheter sedan skulden införts i modellen. Notera hur lutningen minskar när skulden lagts på, detta då konstanten i exponenten ökat.

När skuldtaket för varje agent sattes till  $m_d = -7$  pengaeenheter så skiftades fördelningens startpunkt, som väntat, från  $m = 0$  till  $m = m_d = -7$  pengaeenheter. Väntevärdet  $\langle m \rangle$  förblev konstant med  $\langle m \rangle = 4$  pengaeenheter i båda fallen. I fig. 5a är exponenten  $T_m \approx 4$  pengaeenheter, vilket precis som väntat är  $\langle m \rangle$ . I fig. 5b är exponenten  $\alpha \approx 11$  pengaeenheter, vilket är väntat enligt formeln  $\alpha = T_m + |m_d|$ . Notera att kurvans minskade lutning i fig. 5b medför att det är högre sannolikhet att ha mer pengar. Eftersom pengarna är konserverade så blir detta på bekostnad av de agenter med negativt saldo.

Centralt i denna modell är att de mest sannolika tillstånden är de med högst skuld. Rimligheten i detta resultat kan diskuteras, och görs så i avsnitt 5.5.1. I avsnitt 5.2.1 utvecklas en ny, mer realistisk, skuldmodell. Här tas hänsyn till att banken håller begränsningen av totala skulden, samt att sannolikheten inte ökar att vara belånad vid högre skulder.

## 5.2 Realistisk penningmodell

För att ge en mer realistisk beskrivning av det verkliga utlåningssystemet kan grunderna i penningteori användas. Tanken är att knyta samman den fysikbaserade statistiska modellen med de traditionella ekonomiska modellerna för skuld. Det som gör området intressant är att vi genom simuleringar och teoretiska härledningar kan förstå hur vissa parametrar påverkar det ekonomiska system vi lever i. Framsteg inom området kan ge en betydligt större insikt och förståelse för hur ekonomiska system beter sig än de traditionella teorierna. Fokus ligger på att undersöka hur parametrar som reserveringsgraden  $r$  och insättningstillgångar påverkar välståndet i ett monetärt ekonomiskt system. Den grundläggande teorin i avsnitt 5.2.1 bygger på ett tidigare arbete som gjorts av Wang [8].

### 5.2.1 Teori för monetär ekonomi med statistisk mekanik

I en ekonomi finns en monetär bas  $M_0$  som består av bankers reserver i tillgångar (kontanter, råvaror med mera) och värdet av de pengar som befolkningen håller i form av fysiska

kontanter. Således definieras den monetära basen som

$$M_0 = C + R ,$$

där  $C$  är värdet av fysiska kontanter som befolkningen håller och  $R$  är den totala pengareserv bankerna innehar. Det monetära aggregatet, mängden pengar som befolkningen har tillgänglig, definieras enligt

$$M = C + D , \tag{11}$$

där  $C$  är definierad som tidigare och  $D$  är den mängd pengar som är insatta på bankkonton. Reserven  $R$  som banken innehar kan delas upp i två delar: överskottstillgångar  $R_E$  (som banken får låna ut) och krävda tillgångar  $R_R = rD$  (som banken inte får låna ut), där  $r$  är reserveringsgraden.  $R$  kan alltså betecknas som

$$R = R_E + R_R = R_E + rD . \tag{12}$$

För att göra teorin mer enhetlig med kommande simuleringsmodeller kan man alltid anta att summan kontanter som hålls av befolkningen är noll, det vill säga  $C = 0$ . Kombineras ekv. (11) och ekv. (12) under antagandet att banken maximerat sitt utlånade,  $R_E = 0$ , fås uttrycket:

$$M = \frac{M_0}{r} . \tag{13}$$

Det monetära aggregatet  $M$  har nu vuxit med en faktor  $\frac{1}{r}$  då banken lånat ut sin reserv  $R_E$ . Det som tydligt framgår i förhållandet ekv. (13) är att  $M > M_0$  eftersom  $0 < r < 1$ . Om exempelvis den monetära basen  $M_0$  består av 1 pengaenhet så kommer det monetära aggregatet bestå av  $\frac{1}{r}$  pengaenheter. Enkelt förklarar det denna process som leder till skapandet av pengar. Se avsnitt 5.2.2 för en mer detaljerad beskrivning av hur detta går till. Ett mått på hur mycket pengar en bank totalt kan låna ut, givet en reserveringsgrad  $r$ , definieras som lånevolymer  $L$  enligt

$$L = \frac{M_0}{r} - M_0 . \tag{14}$$

Från ekv. (14) ser man tydligt hur lånevolymer minskar när  $r$  ökar. När  $r = 1$ , vilket innebär att alla banker måste förvara insättningar i reserver, blir lånevolymer  $L = 0$ . Det är utifrån detta tydligt att en ekonomi som sätter en låg reserveringsgrad ger sin befolkning en stor tillgänglig lånevolymer. Om  $r \rightarrow 0$  så går  $L \rightarrow \infty$  vilket visar att om bankerna ej har en begränsning så kan de låna ut oändligt mycket. Detta visar sig också vara fallet vid simulering i avsnitt 5.3.2.  $M$  skulle också bli oändlig då banken skapar oändligt med pengar. Därför begränsas  $r$  till  $0 < r < 1$ .

Nu distribueras ett monetärt välstånd,  $M$ , över ett diskret antal agenter,  $N$ . Antalet agenter med saldo  $m \geq 0$  och  $m < 0$  betecknas som  $n_{m+}$  respektive  $n_{m-}$ . Det totala antalet agenter kan därmed skrivas som

$$N = \sum_{m+} n_{m+} + \sum_{m-} n_{m-} .$$

Om antalet mikrotillstånd  $\Omega$  beräknas som tidigare fås med dessa beteckningar:

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_{m+} n_{m+}! \prod_{m-} n_{m-}!} .$$

Används termodynamikens andra huvudsats (multipliciteten tenderar att öka) så kan man anta att stationärfördelning ges då  $\Omega$  nått sitt maximum. Därmed postuleras att de

totala pengarna för agenterna med positivt saldo  $M_+$  och negativt  $M_-$  når sina stationära teoretiska värden då  $\Omega$  når sitt maximum och hela fördelningen når sitt jämviktsläge. Således förväntas

$$M_+ = \sum_{m^+} n_{m^+} m = M = \frac{M_0}{r}$$

$$M_- = \sum_{m^-} n_{m^-} m^- = -L = M_0 - \frac{M_0}{r} ,$$

när fördelningen uppnått detta läge. För att finna maximum av  $\Omega$  kan man som tidigare, se avsnitt 3.2, använda Lagranges multiplikatormetod. Det differentiella maximeringsproblemet blir

$$d\ln(\Omega) - \alpha dN - \beta dM_+ + \gamma dM_- = 0 , \quad (15)$$

där  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  och  $\gamma > 0$  är multiplikatorer som måste bestämmas. Lösningarna till denna ekvation är på formen

$$\begin{aligned} n_+(m) &= N_0 e^{-\beta m} \quad \forall m \geq 0 \\ n_-(m) &= N_0 e^{\gamma m} \quad \forall m \leq 0 , \end{aligned} \quad (16)$$

där  $N_0 = e^{-\alpha}$  är antalet agenter med  $m = 0$ , som alltså saknar monetärt välstånd. För att få sannolikhetsfördelningarna kan man enkelt manipulera ekv. (16) genom att dividera med det totala antalet agenter  $N$ . Detta ger distributionerna för positivt och negativt monetärt välstånd som

$$\begin{aligned} P_+(m) &= \frac{N_0}{N} e^{-\beta m} \quad \forall m \geq 0 \\ P_-(m) &= \frac{N_0}{N} e^{\gamma m} \quad \forall m \leq 0 . \end{aligned}$$

Det har alltså uppkommit en ny distribution  $P_-(m)$  för de agenter som har negativt saldo. Detta är den centrala skillnaden från tidigare teori där inga agenter med negativt saldo tilläts. En viktig observation jämfört med avsnitt 5.1 är att sannolikheten för en agent att bli mer skuldsatt avtar exponentiellt.

### 5.2.2 Hur banker skapar pengar

Banker skapar pengar genom att bevilja lån. När lånet godkänns får mottagaren pengarna och banken skriver upp lånet som en tillgång. Därefter kan nästa bank i följd låna ut pengar på det nya lånet och en rekursiv process fås. Eftersom kommersiella banker skriver upp lån som tillgångar så har i en bemärkelse mer pengar skapats genom denna process. Processen används för tillgodose alla betalningar och utbetalningar världen över. Den ligger därmed till grund för hela vårt ekonomiska system. Idag är över 97 % av alla pengar i omlopp (det monetära aggregatet  $M$ ) skapat av kommersiella banker [10].

För att förstå denna process, och hur reserveringsgraden  $r$  direkt blir multiplikatorn för hur mycket pengar som skapas för  $M$ , kan vi utgå från ett exempel. Låt oss säga att en insättning  $D$  på 100 kronor görs till bank A och att  $r$  är 10 %. Bank A lånar sedan ut 90 kronor (90 %) till bank B som gör samma process till bank C. Processen fortsätter oändligt långt vilket skapar en oändlig geometrisk serie. I tabellen nedan presenteras de första värdena.



Tabell 2: Exempel hur pengar skapas vid rekursivt lånande med  $r = 10\%$  och initialinsättning på 100 kronor. Observera hur summan för  $L$  stämmer överens med ekv. (14) och  $M = D$ , då  $C = 0$ .

Bank	Insättning $D$ (kronor)	Utlåning $L$ (kronor)	Reserver $R$ (kronor)
A	100	90	10
B	90	81	9
C	81	73	8
D	73	66	7
E	66	59	7
F	59	53	6
...	...	...	...
$\infty$	0	0	0
Summa:	1000	900	100

Notera att det monetära aggregatet  $M$  har ökat till 1000 kronor från initialt 100 kronor med reserveringsgrad  $r = 10\%$ . Allmänt kan summan skrivas som

$$M = a + a(1-r) + a(1-r)^2 + \dots + a(1-r)^{n-1} = a \frac{1 - (1-r)^n}{r}, \quad (17)$$

där  $a$  är konstanten för första insättningen. Då  $n \rightarrow \infty$  och  $0 < r < 1$  blir summan:

$$M = \frac{a}{r} = \frac{M_0}{r}, \quad (18)$$

vilket precis är den allmänna formeln för  $M$ , då initialinsättningen är lika stor som bankernas totala reserv. Utifrån detta framgår tydligt varför den monetära basen är en bas. Den blir lika stor som initialinsättningen efter ett oändligt antal utlåningar. I fortsatta simuleringsmodeller kommer  $r$  förknippas med multiplikatorn  $\frac{1}{r}$  och därmed antas att bankerna maximerat skapandet av pengar vid varje transaktion. Det bör följaktligen också poängteras att pengakonservationen som nämnts tidigare fortfarande gäller. När lånen återbetalas till banken stryks de tillgångar som skrivits upp för dem och man får subtrahera 900 kronor från  $M$  i tabell 2, vilket är samma som pengarna vid start. För mer diskussion om hur man väljer att se sina delsystem i ekonomin hänvisas till avsnitt 5.5.1.

### 5.3 Simuleringar: monetär utlåning

I detta avsnitt redovisas den simuleringsmodell och de resultat som tagits fram för den monetära utlåningsmodellen i avsnitt 5.2.1.

#### 5.3.1 Monetärt system med utlåning

Simuleringsmodellen grundar sig i  $N = 9000$  agenter som börjar med ett initialt saldo  $m_k = 4 \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$  pengaenheter och  $l_k = 0 \forall k \in \{1, 2, \dots, N\}$  lånade pengaenheter. I början placeras alla agenternas saldon i insättningsform  $D$  i en bankreserv  $R$ . Bankens saldo är i början  $R = M_0$  där  $M_0$  är den monetära basen, vilket är  $M_0 = mN = 36000$  pengaenheter. Alltså gäller  $M = M_0$  vid  $t = 0$ . Agenterna får byta pengar med varandra på samma sätt som tidigare, det vill säga genom:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m, \end{aligned}$$

där nu  $m_j(t) > 0$ . Om nu en agent  $j$  istället skulle ha saldo  $m_j(t) = 0$  så genereras ett lån  $\Delta m$  pengaeenheter i  $l_j(t)$ . Agent  $j$  får pengarna  $\Delta m$  på sitt bankkonto  $m_j(t)$  som används för att betala agent  $i$ . Det effektiva utbytet blir således följande:

$$\begin{aligned} l_j(t+1) &= l_j(t) + \Delta m \\ m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m . \end{aligned}$$

Lånen kommer från bankens överskottsreserv  $R_E = R - rD$ . Eftersom  $R = M_0$  och  $D = M$ , kan detta skrivas som  $R_E = M_0 - rM$ .  $M$  ges av det monetära aggregatet, som är alla insättningar  $D$  på agenters bankkonton i varje iteration, det vill säga

$$M(t) = \sum_{k=1}^N m_k(t) . \quad (19)$$

Banken har lånat ut maximalt,  $R_E = 0$ , om  $M = \frac{M_0}{r}$ . Antag att detta inträffar efter  $t = \tau \gg 1$  iterationer. Eftersom agenterna började med totalt  $M_0$  pengaeenheter är lånevolymer  $L$  från banken  $L(t) = M(t) - M_0$ . Detta är samma som summan av alla agenters lån:

$$L(t) = \sum_{k=1}^N l_k(t) . \quad (20)$$

Vid  $t = \tau$  blir  $L = \frac{M_0}{r} - M_0$ , som är den totala lånevolymer en bank kan skapa från ekv. (14). Vid denna tidpunkt kan endast ett nytt lån skapas om en agent återbetalar  $\Delta m$  på sitt lånesaldo. Därför kräver banken tillbaka lån (amortering) efter  $t = \tau$  iterationer, och utbytet blir följande:

$$\begin{aligned} l_i(t+1) &= l_i(t) - \Delta m \\ l_j(t+1) &= l_j(t) + \Delta m , \end{aligned}$$

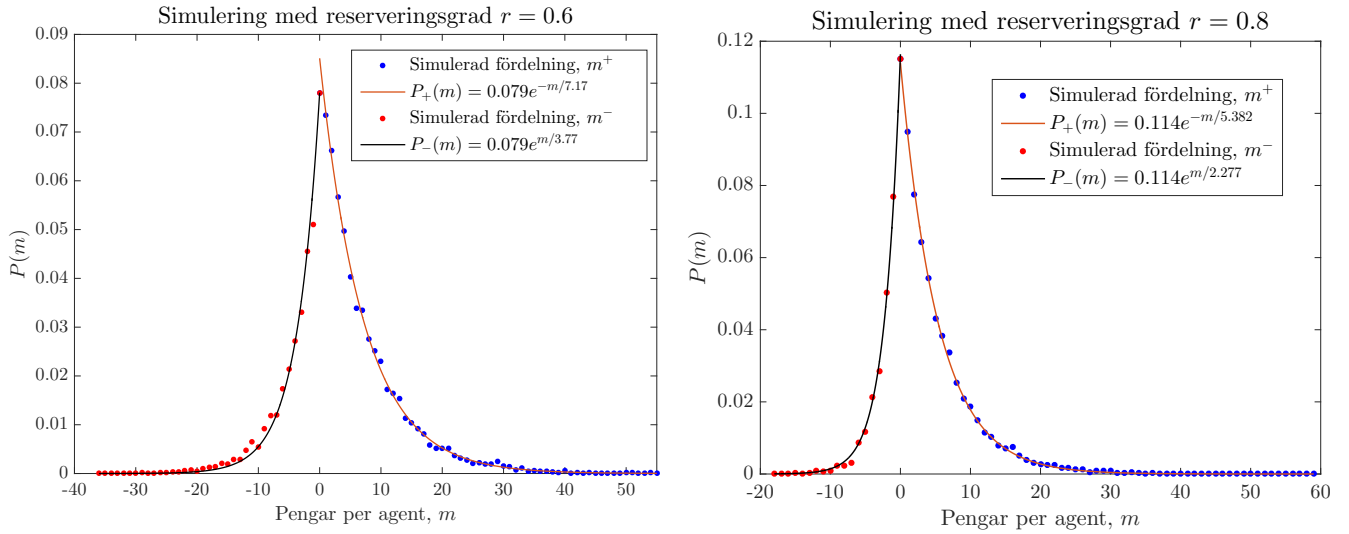
där  $l_i(t) > 0$  då en agent inte får betala av ett lån som den inte har. Efter  $\tau' \gg \tau$  iterationer, när simuleringen nått sin stationärfördelning, subtraheras agenternas lån från deras saldon:

$$m_k(\tau') - l_k(\tau') \quad \forall \quad k = \{1, 2, \dots, N\} . \quad (21)$$

Fördelningen av antalet agenter med positiv saldo  $n_{m+}$ , respektive negativt  $n_{m-}$ , plottas i fig. 6.

### 5.3.2 Resultat av simulering

Resultatet från de simuleringar som gjorts med modellen i avsnitt 5.3.1 presenteras i fig. 6 nedan. I simuleringen utfördes 10 miljoner iterationer.



(a) Agenters nettotillgång vid  $r = 0.6$ .

(b) Agenters nettotillgång vid  $r = 0.8$ .

Figur 6: Här visas den stationärfördelning som uppstår när reserveringsgraden  $r$  är 0.6 respektive 0.8. Det syns tydligt i fig. 6b hur överbelåningen har minskat jämfört med fig. 6a.

När  $r$  ökar från 0.6 till 0.8 så minskar  $R_E$ , det vill säga den delen i reserven  $R$  som banken får låna ut. Detta leder till att bankens förmåga att skapa pengar minskar och agenternas får större negativt saldo (vilket kallas överbelåning). Emellertid så minskar sannolikheten att ha större positivt saldo på bekostnad av detta. Genom att beräkna en kumulativ fördelningsfunktion kan man tydligare se hur sannolikheten för att ha negativt saldo ändras. Den totala sannolikheten för skuldsidan beräknas genom:

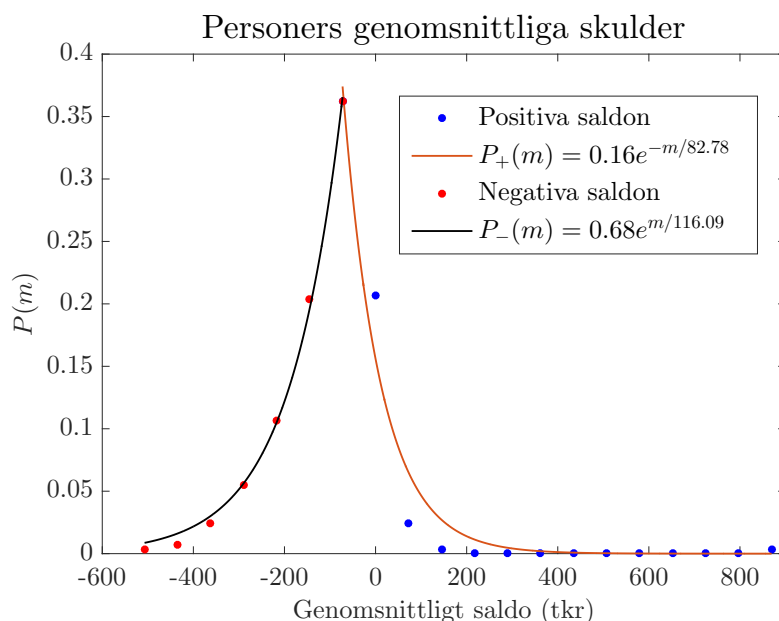
$$\begin{aligned}
 P(\text{skuld}, r = 0.6) &= \int_{-\infty}^0 P_-(m) dm = \int_{-\infty}^0 0.079e^{m/3.77} dm = 0.29 \\
 P(\text{skuld}, r = 0.8) &= \int_{-\infty}^0 P_-(m) dm = \int_{-\infty}^0 0.114e^{m/2.277} dm = 0.26 ,
 \end{aligned}$$

vilket visar på att sannolikheten att ha negativt saldo, bli överbelånad, har minskat då  $r$  ökar. Det framgår också från fig. 6 att väntevärdet för de skuldsatta  $\langle m^- \rangle = T_-$  ökat från  $T_- = -3.77$  till  $T_- = -2.277$  då  $r$  ökar från 0.6 till 0.8. Samtidigt minskar väntevärdet för de icke-skuldsatta  $\langle m^+ \rangle = T_+$  från  $T_+ = 7.17$  till  $T_+ = 5.38$ . Av detta framgår det tydligt att välståndet för agenter med positivt saldo minskat på grund av att belåningen minskat. Alltså kan högre välstånd fås i ekonomier som har högre belåning (lägre  $r$ ), men på bekostnad av att de skuldsatta får mer skuld.

Konvergens i simuleringsmodellen testades också. Enligt teori i avsnitt 5.2.1 så divergerar både de positiva saldon  $M_+$  och de negativa  $M_-$  då  $r \rightarrow 0$ . Detta kunde observeras då bankens överskottsreserv  $R_E$  aldrig konvergerade mot noll. Resultatet blev att banken lånade ut obegränsat med pengar och de negativa saldon divergerade tillsammans med de positiva. Alltså måste stort beaktande tas när banker har väldigt små till inga begränsningar på sin utlåningsförmåga.

## 5.4 Dataanpassning

Nedan så följer en anpassning av svensk data från Statistiska Centralbyrån [9] till en exponentiell anpassning av skuldsidan. I datan ingår genomsnittliga finansiella tillgångar och totala skulder för personer i landets 290 kommuner. De totala skulderna subtraherades från de finansiella tillgångarna för respektive kommun och benämns som genomsnittligt saldo i fig. 7. Detta innebär att om skulderna överskrider ens finansiella tillgångar så representeras man med ett negativt saldo. Plotten i fig. 7 framställdes genom att summera antalet kommuner med ett visst intervall på sitt genomsnittliga saldo med varandra. Intervallen var 72.45 tusen kronor i bredd och placerades med referenspunkt i origo. Genom att sedan dividera med totala antalet kommuner (290) för varje delintervall så kunde sannolikhetsfördelningen fås.



Figur 7: Figuren visar sannolikheten i förhållande till personers genomsnittliga finansiella tillgångar subtraherat med skulder över 290 kommuner. Den genomsnittliga överbelåningen  $T_- = -166.09$  och nettotillgången  $T_+ = 82.78$  tusen kronor.

Figur 7 tyder på att de överbelånades genomsnittliga saldon är exponentialfördelade. Detta indikerar starkt att modellen som tagits fram i avsnitt 5.3.1, med skulder begränsade av bankens reserveringsgrad, är giltig. Notera hur maximum för de anpassade fördelningsfunktionerna  $P_-(m)$  och  $P_+(m)$  inte befinner sig vid  $m = 0$ , vilket avviker en aning mot teori i avsnitt 5.2.1. Dock så är  $m$  för maximum nära noll i datan så modellens predikterade värde visar sig vara en god approximation.

Summeras sannolikheterna  $P_-(m)$  för de kommuner som har negativa saldon kan man, som i avsnitt 5.3.2, få den kumulativa sannolikheten. Sannolikheten för att vara skuldsatt (ha negativa pengar) blir genom summering av dessa kommuner  $P(\text{skuldsatt}) = 0.76$ . Att ha mer tillgångar än skuld medför positivt saldo och sannolikheten är komplementet till att vara skuldsatt, det vill säga  $P(\text{ej skuldsatt}) = 1 - 0.76 = 0.24$ . Därmed är det betydligt större sannolikhet att ha mer skulder än finansiella tillgångar i Sverige. Detta innebär att motsvarande reserveringsgrad  $r$  för Sverige måste vara betydligt mindre än 0.6 (jämför avsnitt 5.3.2), då fördelningen i fig. 7 är viktad mot skuldsidan (jämför fig. 6a). Så visar sig också vara fallet i svensk reglering [11].

## 5.5 Diskussion för modeller med skuld

I följande avsnitt diskuteras de olika delar som tagits upp inom området skuld.

### 5.5.1 Olika visualiseringar av delsystem inom belåning

Den avgörande faktorn om man ser på ekonomin som att pengar är konserverade är hur man definierar sina delsystem. Eftersom lån både är en tillgång och en skuld samtidigt så har man friheten att välja. Banker väljer att se sina utlånade pengar som en tillgång samtidigt som de utlånade pengarna naturligtvis är positiva, därför kan man se det som att mer pengar har skapats genom en sådan process. I själva verket så har inga mer pengar skapats eftersom personer är skyldiga att betala av sina lån. Eftersom återbetalningstiden för majoriteten av exempelvis huslån är väldigt lång blir det dock en stor fördröjning i hela systemet, vilket betyder att ekonomin uppfattar det som att mer pengar existerar. Denna fördröjning hinner aldrig jämnas ut eftersom den monetära ekonomin alltid är i behov av lån. På så sätt är det svårt att realisera pengakonservation i våra vardagliga ekonomiska system, även om den existerar.

### 5.5.2 Diskussion av enkel agentbaserad skuldmodell

Denna modell fungerar väl som en första förståelse i hur agenter kan låna pengar. Modellen är dock lite för trivial för att beskriva hur folk egentligen tar lån i en monetär ekonomi. Av detta skäl så var det svårt att anpassa data, då samhällssystemen inte betedde sig som modellen. Bristen ligger i att sannolikheten är störst för de tillstånd med högst belåning. Med skulddatan från Statistiska Centralbyrån i Sverige [9] och resultatet i fig. 7 så finner man att högst belåning inte är det mest sannolika tillståndet, utan det minst sannolika. En intuitiv förklaring till detta är Sveriges regleringar i kommersiella banker [11]. Det är med andra ord väldigt svårt att ta mer lån om man redan har lån som sträcker sig långt över ens tillgångar. Detta stämmer bättre överens med den monetära utlåningsmodellen i avsnitt 5.2.1.

### 5.5.3 Diskussion av monetär utlåningsmodell

Här diskuteras modellen i avsnitt 5.2.1, som grundar sig i det tidigare arbetet av Wang [8]. Modellen visade sig fungera bäst för att förklara den exponentiella fördelningen av skulder som förekommer i fig. 7. Det som gör modellen intressant är att den använder grundläggande teorier om monetär ekonomi, vilket styrker dess trovärdighet. Dock används inte reserveringsgrad i Sverige då våra kassakrav mot bankerna är noll [12]. Det finns istället andra typer av regleringar som vi använder oss av, vilka har en ekvivalent effekt som reserveringsgraden. Det riksbanken i Sverige implementerat är primärkapitalkrav och kärnprimärkapitalkrav [11]. Dessa är i princip ekvivalenta med begreppet reserveringsgrad i denna rapport och anger hur mycket kapital banken måste hålla enligt lag. Reserveringsgraden är helt central för hur en ekonomi blir överbelånad och därmed hur mycket pengar banken kan skapa. Det är denna begränsning av utlåningssystemet som gör att modellen fungerar så väl.

## 5.6 Sammanfattning och tolkning

I detta avsnitt togs en enkel agentbaserad skuldmodell fram med inspiration från Yakovenko [13]. Modellen visade sig inte stämma överens med verklig svensk förmögenhetsdata [9]. Felaktigheten är att det inte är högst sannolikhet att vara mest skuldsatt. En viss rimlighet finns dock i att det är högre sannolikhet att vara rikare när skuldtaket för ekonomin blir större ( $|m_d|$  ökar).

Med inspiration från den enkla skuldmodellen arbetades en ny modell fram (avsnitt 5.2.1), med utgångspunkt i ett tidigare arbete av Wang [8]. Denna skiljer på agenter med negativa saldon och positiva saldon, där också begränsningen att låna ut pengar är hos banken och inte individen. Begreppet reserveringsgrad  $r$ , som bestämmer den andel pengar en bank måste ha i reserver, införs. Reserveringsgraden är direkt kopplad till hur mycket pengar en bank kan låna ut och därmed hur mycket de kan öka  $M$ . När  $r$  ökades i simuleringsmodellerna framgick det tydligt att överbelåningen för agenterna minskade. Med simulerade resultat och teori från denna modell kunde fördelningen i svensk data [9] beskrivas.

I samband med den monetära utlåningsmodellen förklarades också hur banker väljer att se sina utlånade pengar som tillgångar. När bankerna lånar ut sina pengar räknas bankkontons saldon som positiva för ekonomin. Resultatet av detta är att det monetära aggregatet  $M$  växer med en faktor  $\frac{1}{r}$  (från initialt  $M_0$ ), vilket leder till det begrepp som inom ekonomiska termer kallas för skapande av pengar. I själva verket har inga mer pengar skapats, utan uppfattas endast så av ekonomin när man mäter pengarna i omlopp ( $M$ ). Banker lånar alltid ut betydligt mer än vad de har i reserver, reserveringsgraden  $r$  i exempelvis USA är mellan 3% och 10 % [14]. Eftersom lånen i många fall tar tid att återbetala uppfattar ekonomin det som att det finns mer pengar i omlopp.

## 6 Beskattning

I kapitel 3 härleddes Boltzmannfördelningen genom maximering av entropin med kombinatoriska resonemang. Antagandet att alla systemets mikrotillstånd är lika tillgängliga var grundläggande för denna härledning. För att idén om entropi ska kunna appliceras även i ett ekonomiskt sammanhang måste detta antagande fortfarande gälla. Om så inte skulle vara fallet, gäller inte längre att jämviktstillståndet definieras av det makrotillstånd som har den största multipliciteten. I fallet för ett ekonomiskt system innebär antagandet att ett mikrotillstånd där en enda människa äger alla pengar är lika tillgängligt som ett mikrotillstånd där pengarna är mer jämnt fördelade. Man behöver inte fundera länge för att inse att detta knappast speglar verklighetens inkomstfördelning, där krafter såsom beskattning strävar efter att utjämna de ekonomiska skillnaderna. Beskattningen påverkar mikrotillståndens tillgänglighet. Ovan nämnda antagande håller därför inte och det är inte längre möjligt att finna fördelningsfunktionen bara genom att maximera entropin så som den definierats i kapitel 3.

Med utgångspunkt i detta är det intressant att undersöka vilken betydelse bland annat beskattning har på inkomstfördelningens utseende. En i sammanhanget intressant distribution är gammafördelningen, en tvåparameterdistribution nära besläktad med exponentialfördelningen. Dess allmänna ekvation lyder

$$P(m) = cm^{k-1}e^{-m/\theta}, \quad (22)$$

där  $\theta$  är den så kallade skalparametern,  $k$  avgör kurvans form och  $c$  är en normeringskonstant. Notera särskilt att exponentialfördelningen, eller Boltzmannfördelningen, är ett specialfall av gammafördelningen där  $k = 1$ . Pengatemperaturen definierades i kapitel 4 som medelinkomsten, eller mer generellt som den aktuella distributionens väntevärde. För en gammafördelning enligt ekv. (22) gäller att väntevärdet ges av

$$T_m = k\theta.$$

Det framgår av ekv. (22) att  $P(m) \rightarrow 0$  då  $m \rightarrow 0$ , vilket svarar mot att sannolikheten för att någon individ inte ska ha någon inkomst alls är noll. Detta gäller inte för Boltzmannfördelningen  $P(m) = \tilde{c}e^{-m/T_m}$ , för vilken  $P(m) \rightarrow \tilde{c}$  då  $m \rightarrow 0$ . Båda fördelningarna avtar exponentiellt då  $m \rightarrow \infty$ . Gammafördelningen innebär alltså att det är mest sannolikt att återfinna en individ nära populationens medelinkomst. Detta till skillnad från fallet med Boltzmannfördelningen, som istället medför att det är allra mest sannolikt att en individ har en inkomst nära noll. Gammafördelningen medför därmed att färre har mycket låg inkomst.

I detta avsnitt föreslås en ny, viktad, form av entropi genom vilken hänsyn tas till mikrotillståndens olika tillgänglighet. Denna nya entropi maximeras vilket resulterar i en ny stationär fördelning. Ginikoefficienten, som utgör ett vedertaget mått på monetär jämlikhet inom den ekonomiska världen, definieras också. Genom att beräkna ginikoefficienten för en pengafördelning erhålls ett kvantitativt mått på hur jämlikt pengarna är fördelade. Vidare utförs ett antal simuleringar i syfte att undersöka hur beskattning av inkomst respektive förmögenhet påverkar pengafördelningen och jämlikheten. Standardentropin från kapitel 3 beräknas kontinuerligt under simuleringarna, detta för att undersöka hur dess värde påverkas då olika grader av beskattning införs. Slutligen jämförs de erhållna resultaten med data över inkomstfördelningarna i Sverige respektive USA. Jämförelse dem emellan anses ge en god indikation på huruvida tidigare resultat och antaganden varit korrekta.

## 6.1 Beskattning påverkar mikrotillståndens tillgänglighet

Medan många stora system kan anses karaktäriseras av mikrotillstånd som alla är lika tillgängliga, se avsnitt 3.2, finns det exempel på andra stora system där detta inte gäller. Ett sådant system följer inte nödvändigtvis Boltzmannfördelningen, vilket följer av härledningen av denna i avsnitt 3.2 där alla mikrotillstånd ansågs lika tillgängliga. Ett ekonomiskt system under påverkan av skatt och bidrag är ett exempel på ett system där de olika mikrotillstånden inte alla är lika tillgängliga. Vid beskattningen och bidragsutdelningen förflyttas tillgångar från höginkomsttagare till låginkomsttagare. Tillgängligheten minskar därför för de mikrotillstånd som karaktäriseras av stor ojämlikhet, detta då sådana tillstånd aktivt motarbetas av beskattningen och bidragsutdelningen. Många försök har gjorts att finna ett uttryck för en generaliserad entropi som tar hänsyn till de olika mikrotillståndens tillgänglighet. Här visas den ansats som föreslagits i [15]. Multipliciteten definierades i avsnitt 3.1 som

$$\Omega = \frac{N!}{\prod_{m=0}^{\infty} N_m!} ,$$

där  $N$  är det totala antalet partiklar och  $N_m$  är antalet partiklar med energin  $m$ . Låt från och med nu partiklarna och energin motsvaras av individer respektive pengar. I enlighet med [15] viktas uttrycket för multipliciteten  $\Omega$ , vilket ger

$$\Omega' = \prod_{m=0}^{\infty} w_m^{N_m} \frac{N!}{\prod_{m=0}^{\infty} N_m!} ,$$

där  $w_m \in [0, 1]$  är en viktningsparameter direkt kopplad till storleken av pengainnehavet  $m$ , sådan att  $w_m$  är liten för mycket små och stora  $m$ . För medelstora  $m$ , det vill säga sådana  $m$  som ligger nära  $T_m$ , är  $w_m$  stor. Därmed är agenttillstånd nära  $T_m$  mer tillgängliga än agenttillstånd långt bort från  $T_m$ . Observera att  $\Omega' = \Omega$  då  $w_m = 1 \forall w_m$ , vilket svarar mot fallet då alla mikrotillstånd är lika tillgängliga. Definiera därefter den nya, viktade entropin som

$$S' = \log(\Omega') .$$

På samma sätt som i avsnitt 3.2 används därefter Lagranges multiplikatorer för att maximera  $S'$  under bivillkoren:

$$N = \sum_{m=0}^{\infty} N_m , \quad E = \sum_{m=0}^{\infty} m N_m . \quad (23)$$

Det relativa ockupationstalet  $P(m) = \frac{N_m}{N}$  blir då

$$P(m) = c w_m e^{-\beta m} , \quad (24)$$

där konstanterna  $c = e^\alpha$ ,  $\alpha$  respektive  $\beta$  är de aktuella Lagrangemultiplikatorerna. Dessa fås genom insättning av ekv. (24) i villkoren för  $N$  och  $E$  från ekv. (23):

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} w_m e^{\alpha - \beta m} , \quad \frac{E}{N} = \sum_{m=0}^{\infty} w_m m e^{\alpha - \beta m} .$$

Detta är den sökta fördelningsfunktionen. Som synes beror den makroskopiska pengafördelningen av sannolikheterna  $w_m$  så till den grad att distributionens karaktär helt avgörs av hur koefficienterna  $w_m$  beror av  $m$ . Det är dessvärre mycket svårt att finna ett exakt uttryck för  $w_m$ , även om en kvalificerad gissning kan göras. Påverkan av  $w_m$  är störst då  $m$  är liten. Då  $m \rightarrow \infty$  överskuggas betydelsen av  $w_m$  av faktorn  $e^{-\beta m}$ , som snabbt går mot



noll. Det är därför inte orimligt att anta att  $w_m \propto \left(\frac{m}{T_m}\right)^{k-1}$ , med någon okänd konstant  $k \in \mathbb{R}^+$ , för små  $m$ . Detta då mikrotillstånd som kännetecknas av att många individer har mycket små  $m$  anses vara osannolika sedan beskattnings- och bidragssystemet tagits i beaktande. Ju mindre  $m$ , desto lägre sannolikhet. Om så verkligen är fallet, skulle det innebära att  $P(m) \propto m^{k-1}e^{-m/\theta}$  för begränsade  $m$  (där  $\beta \equiv 1/\theta$ ).  $P(m)$  skulle alltså vara gammafördelad. Det finns därför anledning att misstänka att inkomsten i länder med högt skattetryck är gammafördelad snarare än exponentialfördelad.

## 6.2 Ginikoefficienten – ett mått på ekonomisk jämlikhet

Inom den ekonomiska vetenskapen är den så kallade ginikoefficienten  $G$  ett välkänt begrepp. Den utgör ett mått på ekonomisk jämlikhet i en population, där  $G = 0$  svarar mot fullständig jämlikhet (alla har exakt lika mycket tillgångar) och  $G = 1$  innebär maximal ojämlikhet (en agent kontrollerar alla tillgångar). Ginikoefficienten definieras som

$$G = \frac{\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N |m_i - m_j|}{2N^2\mu},$$

där  $N$  är antalet individer i populationen,  $m_j$  är tillgångarna hos den  $j$ :e individen och  $\mu$  är medelvärdet av tillgångarna. Genom att beräkna  $G$  för de distributioner som tas fram, erhålls ett väletablerat mått på ekonomisk jämlikhet [16]. Som jämförelse kan nämnas att den exponentiella fördelningen har en ginikoefficient  $G = 0.5$ .

## 6.3 Agentbaserad modell: beskattning

På samma sätt som tidigare betraktas en population om  $N$  agenter vars sammanlagda mängd pengar är konstant över tid. Skuld är inte tillåtet i denna modell, detta för att isolera effekterna av beskattningen. Agenterna tilldelas initialt en mängd pengar  $T_m$  kronor vardera. Systemet kan betraktas som slutet enligt tidigare resonemang. Som i den tidigare modellen dras vid varje tidpunkt  $t$  två slumpmässiga agenter  $i$  respektive  $j$ , mellan vilka en transaktion

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m \end{aligned}$$

sker, under förutsättning att den givande agenten  $j$  vid tiden  $t$  har en mängd pengar  $m_j(t) \geq \Delta m$ . Det visades i kapitel 3 att en sådan modell ger upphov till en Boltzmannfördelning av pengarna. Detta pengautbyte kommer nu att modifieras något, så att agenterna tvingas betala skatt antingen baserat på inkomst eller på nuvarande pengainnehav. På samma sätt som i kapitel 4 undersöks samtidigt hur entropin förändras under simuleringen. Påverkas dess värde av beskattningen?

### 6.3.1 Inkomstskatt

Tidigare har transaktionen  $\Delta m$  varit konstant. I simuleringar utförda av andra (se till exempel [17]) används ibland modeller där  $\Delta m = \alpha m_j$  för någon konstant  $\alpha \in [0,1]$ , det vill säga där den givande agenten ger bort en viss andel av sina pengar. Det har visat sig att sådana modeller resulterar i att agenternas pengainnehav får formen av en gammafördelning [4]. I denna modell prövas en annan bytesregel, som i större utsträckning liknar verklighetens system där både skatt och bidrag förekommer. Skatten dras som inkomstskatt. Eftersom transaktionen  $\Delta m$  är lika stor oavsett mellan vilka agenter bytet

sker, betalar alla agenter lika mycket inkomstskatt oavsett hur mycket pengar de har. Skatten fördelas sedan jämnt över den minst förmögna andelen  $D$  av populationen. Antag att en andel  $f$  av inkomsten  $\Delta m$  skattas bort. Låt därför vid varje tidpunkt följande transaktion ske:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + (1-f)\Delta m + q(m_i(t)) \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m + q(m_j(t)) \\ m_k(t+1) &= m_k(t) + q(m_k(t)) \quad \forall k \neq i, j . \end{aligned}$$

Här är representerar index  $k$  alla de agenter som för tillfället inte byter pengar. Bidraget  $q$  ges av

$$q(m_l) = \begin{cases} \frac{f\Delta m}{n} & \text{för } m_l \in D \\ 0 & \text{för } m_l \notin D . \end{cases} \quad (25)$$

Här är  $n$  antalet agenter som får ta emot bidrag, det vill säga antalet agenter inom den minst förmögna andelen  $D$  av befolkningen. Utbytesreglerna i denna modell utjämnar i varje iteration det ekonomiska systemet mot en mer jämlik pengafördelning.

### 6.3.2 Förmögenhetsskatt

I avsnitt 6.3.1 redovisades en enkel skattmodell, vilken byggde på beskattning av inkomst. En annan typ av beskattning är beskattning av egendom och förmögenhet. Även här delas den beskattade summan ut som bidrag till den fattigaste andelen av populationen. Vid varje tidssteg utförs den ursprungliga transaktionen

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m . \end{aligned}$$

Var 10 000:e tidssteg genomförs dessutom beskattning samt utdelning av bidrag. Transaktionen blir då följande:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m + q(m_i(t)) - \phi m_i(t) \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m + q(m_j(t)) - \phi m_i(t) \\ m_k(t+1) &= m_k(t) + q(m_k(t)) - \phi m_i(t) \quad \forall k \neq i, j . \end{aligned}$$

På samma sätt som tidigare är agenten med index  $j$  den givande, agenten med index  $i$  den tagande och agenter med index  $k \neq i, j$  agenter vilka inte deltar i bytesaffären.  $\phi \in [0, 1]$  är skattesatsen. Det gäller alltså att samtliga agenter betalar en förmögenhetsskatt, vilken är proportionell mot deras respektive pengamängd. Bidraget  $q$  blir nu

$$q(m_l) = \begin{cases} \frac{\sum_{x=1}^N \phi m_x}{n} & \text{för } m_l \in D \\ 0 & \text{för } m_l \notin D . \end{cases} \quad (26)$$

På samma sätt som tidigare är  $n$  antalet mindre förmögna agenter, det vill säga antalet agenter inom  $D$ .

## 6.4 Simulerade resultat: beskattning

Här presenteras resultatet av simuleringar utförda på det sätt som beskrivits under avsnitt 6.3, för ett antal olika värden på inkomstskatten respektive förmögenhetsskatten. I samtliga fall gäller att  $N = 10^4$  agenter initialt tilldelas  $T_m = 10$  pengaeenheter vardera. Vid

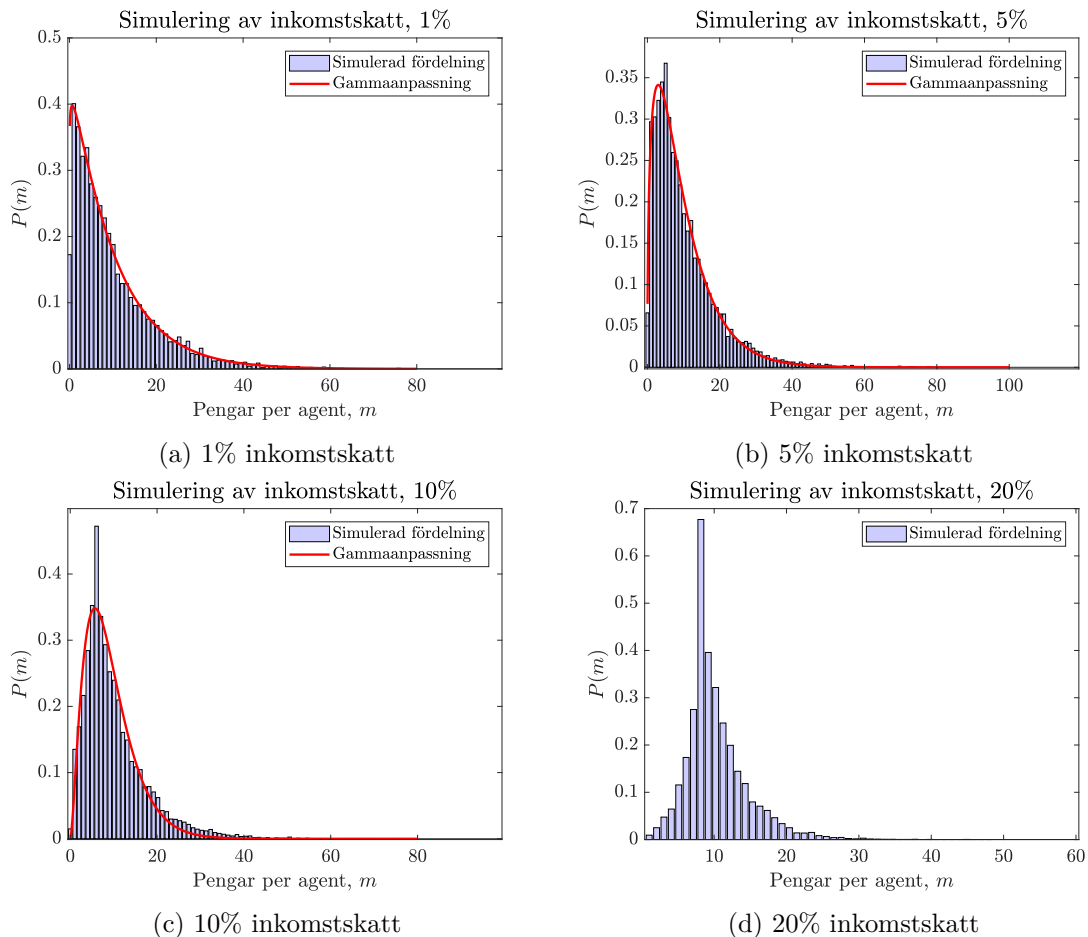
samtliga simuleringar beräknas entropin  $S$  kontinuerligt, detta för att undersöka hur denna storhet påverkas av beskattningen. Ginikoefficienten beräknas sedan stationärfördelningen uppnått. En miljon iterationer görs innan simuleringarna avbryts. Detta antal är valt med hänsyn taget till tidsåtgången, sedan det konstaterats att pengafördelningen hunnit bli stationär då. De erhållna fördelningarna delas därefter automatiskt upp i det antal intervall som ger de mest högupplösta kurvanpassningarna. Plottar över hur entropin  $S$  förändras över tid för ett antal olika skattesatser görs, detsamma för ginikoefficienten  $G$ . Slutvärdet på  $S$ , tillsammans med övriga intressanta resultat, presenteras i tabell 3 respektive tabell 4. För jämförelse, betrakta en simulering utan beskattning i fig. 2 i kapitel 4. Då erhöles den slutliga stationärfördelningen

$$P(m) = 0.1e^{-m/10} . \quad (27)$$

Pengarna blev alltså tydligt Boltzmannfördelade.

### 6.4.1 Inkomstskatt och bidrag

Nedan presenteras resultatet av ett antal simuleringar för olika inkomstskatter. Skatter på 1%, 5%, 10% samt 20% visas här.



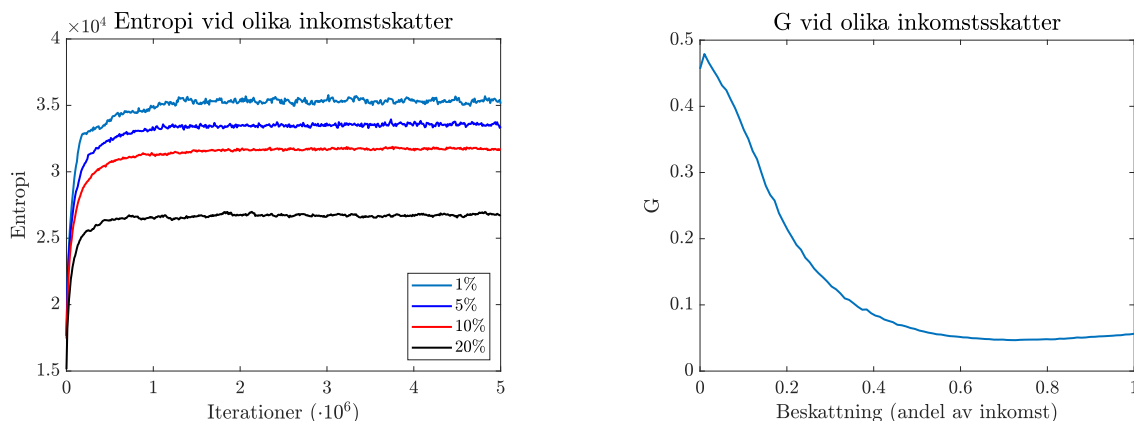
Figur 8: Simuleringar gjorda för ett antal olika värden på inkomstskatten, samt tillhörande gammaanpassningar i de fall sådana har kunnat göras. Notera att ingen anpassning kunde göras för fördelningen med 20% inkomstskatt i fig. 8d.

Tabell 3: Värden på  $P(m)$ ,  $G$  samt slutvärde på  $S$  för de olika skattesatserna från fig. 8. Ingen anpassning kunde göras för simuleringen svarande mot 20%.

Skatt (%)	Anpassning $P(m)$	$G$	Slutvärde $S$
1	$0.45m^{0.07}e^{-m/9.5}$	0.49	$3.5 \cdot 10^4$
5	$0.33m^{0.5}e^{-m/6.7}$	0.45	$3.3 \cdot 10^4$
10	$0.11m^{1.6}e^{-m/3.5}$	0.38	$3.2 \cdot 10^4$
20	–	0.22	$2.7 \cdot 10^4$

Från graferna i fig. 8a framgår att den erhållna pengafördelningen blir alltmer centrerad kring  $m = 10$  pengaeenheter då inkomstskatten ökar. Som följd av detta blir gammaanpassningen allt sämre; för skattesatser över  $\tilde{15}\%$  kan man inte längre säga att gammafördelningen är en bra anpassning. Se den uppkomna fördelningen i fig. 8.

Motsvarande värden på ginikoefficienten  $G$  samt slutvärde på entropin  $S$  finns redovisade i tabell 3. Det framgår tydligt att ginikoefficienten minskar då inkomstskatten ökar, ett tecken på att pengafördelningen blir mer jämlik för höga skattesatser än för låga. Intressant är också att notera att entropin är störst för fallet utan skatt, det vill säga simuleringen där ingen inverkan gjorts på hur agenterna tillåts byta pengar. Entropin minskar då beskattningen ökar, vilket är ekvivalent med att oordningen i pengafördelningen bli mindre för högre skattesatser. Detta är ännu tydligare i fig. 9a, där utvecklingen av entropin  $S$  för de första  $5 \cdot 10^6$  iterationerna plottas för samma skattesatser som använts i fig. 8.



(a) Utvecklingen av entropin  $S$  för de första  $5 \cdot 10^6$  iterationerna för inkomstskatter på 1%, 5%, 10% och 20%.

(b) Ginikoefficienten  $G$  beräknad sedan stationärfördelning uppnåtts för ett stort antal olika inkomstskatter mellan 0 och 100%.

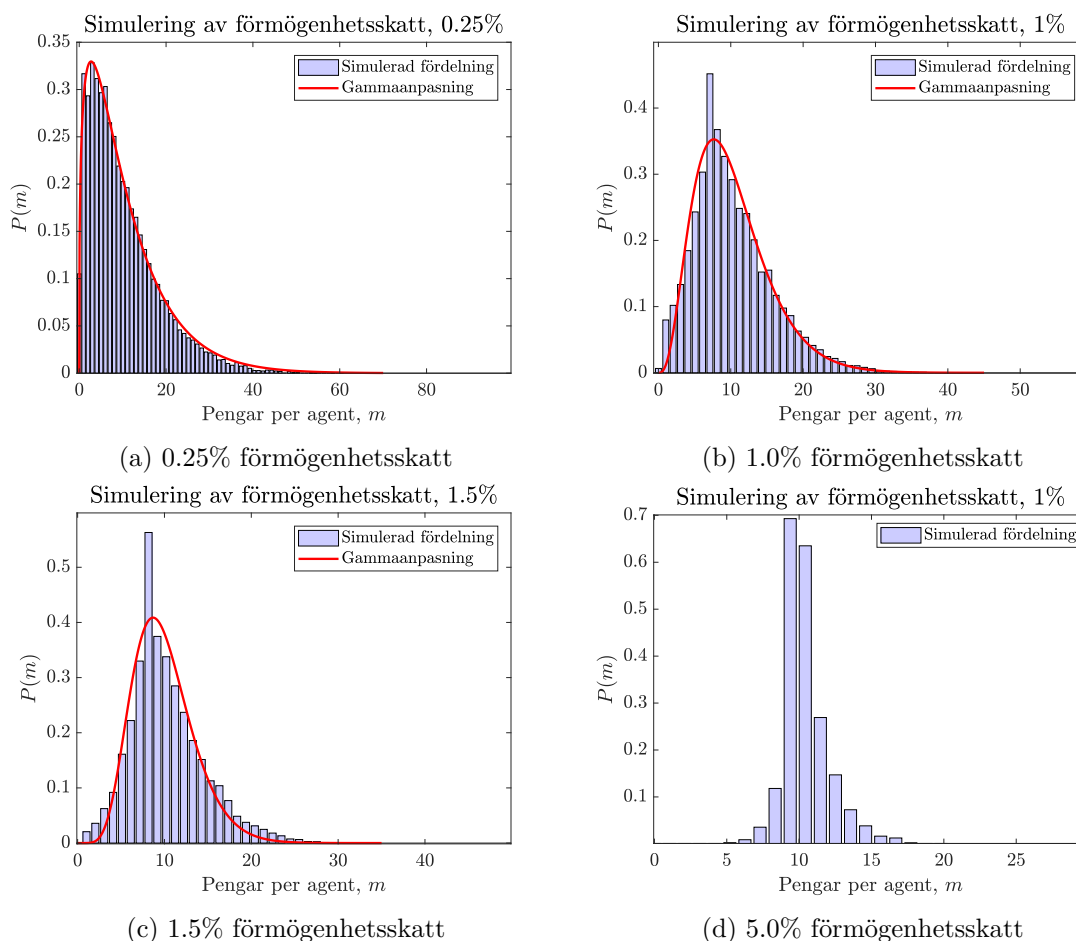
Figur 9: Utvecklingen av entropin  $S$  samt slutvärdet på ginikoefficienten  $G$  för olika inkomstskatter.

I fig. 9b visas hur ginikoefficienten förändras då inkomstskatten ökar från 0 till 100%. Notera att kurvans lutning är som brantast i skatteintervallet 0-30%, vilket medför att en ökning av skatten är som mest effektiv då. För skattesatser  $> 60\%$  blir inte pengafördelningen mer jämlik då skatten ökar ytterligare.

#### 6.4.2 Förmögenhetsskatt och bidrag

Nedan presenteras resultatet av simuleringar där skatten i var 10 000:e iteration dragits som förmögenhetsskatt. Vid dragning av förmögenhetsskatt har samtliga agenter beskattats

med en andel av sina pengar. Detta har sedan delats ut till de 30 minst förmögna procenten. Entropin  $S$  och ginikoefficienten  $G$  har beräknats på samma sätt som tidigare.



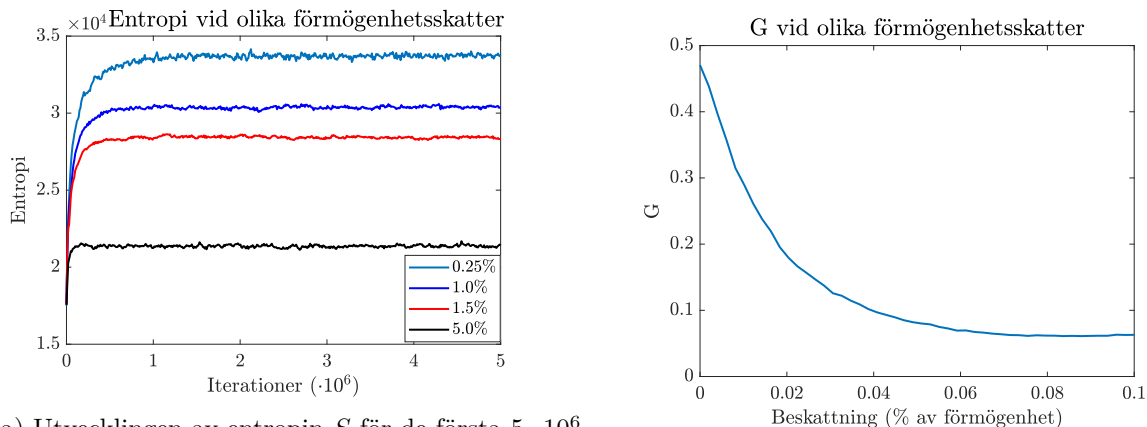
Figur 10: Simuleringar gjorda för ett antal olika värden på förmögenhetsskatten, samt tillhörande gammaanpassningar i de fall sådana har kunnat göras. Notera att ingen anpassning kunde göras för fördelningen med 5% förmögenhetsskatt i fig. 10d.

Tabell 4: Värden på  $P(m)$ ,  $G$  samt slutvärde på  $S$  för de olika skattesatserna från fig. 10. Ingen anpassning kunde göras för simuleringen svarande mot 5%.

Skatt (%)	Anpassning $P(m)$	$G$	Slutvärde $S$
0.25	$0.3m^{0.3}e^{-m/7.8}$	0.43	$3.4 \cdot 10^4$
1.0	$0.02m^3e^{-m/2.6}$	0.29	$3.0 \cdot 10^4$
1.5	$1.2 \cdot 10^{-4}m^7e^{-m/1.25}$	0.23	$2.8 \cdot 10^4$
5.0	–	0.08	$2.1 \cdot 10^4$

I fig. 10 demonstreras hur den stationära pengafördelningen ändrar form då förmögenhetsskatten ökar från 0.25 – 5.0%. Precis som för fallet med inkomstskatten blir fördelningen alltmer symmetriskt kring  $m = 10$  pengaenheter då skatten ökar. Det framgår av plottarna i fig. 10 att gammadistributionen blir en allt sämre anpassning då beskattningen ökar. För höga skattesatser ( $> 5\%$ ) blir systemet alltmer instabilt och en gammaanpassning kan inte längre göras.

I tabell 4 visas anpassade distributionsfunktioner  $P(m)$ , beräknade ginikoefficienter  $G$  samt entropier  $S$  för de stationära fördelningarna från fig. 10. Det framgår att formparametern  $k$  ökar då skatten ökar från 0.25% till 5.0%, samt att både ginikoefficienten  $G$  och slutvärdet på entropin  $S$  minskar under detta skatteintervall. Detta är ännu tydligare i fig. 11.



(a) Utvecklingen av entropin  $S$  för de första  $5 \cdot 10^6$  iterationerna för förmögenhetsskatter på 0.25%, 1.0%, 1.5% och 5.0%.

(b) Ginikoefficienten  $G$  beräknad sedan stationärfördelning uppnåtts för olika förmögenhetsskatter.

Figur 11: Utvecklingen av entropin  $S$  samt slutvärdet på ginikoefficienten  $G$  för olika förmögenhetsskatter.

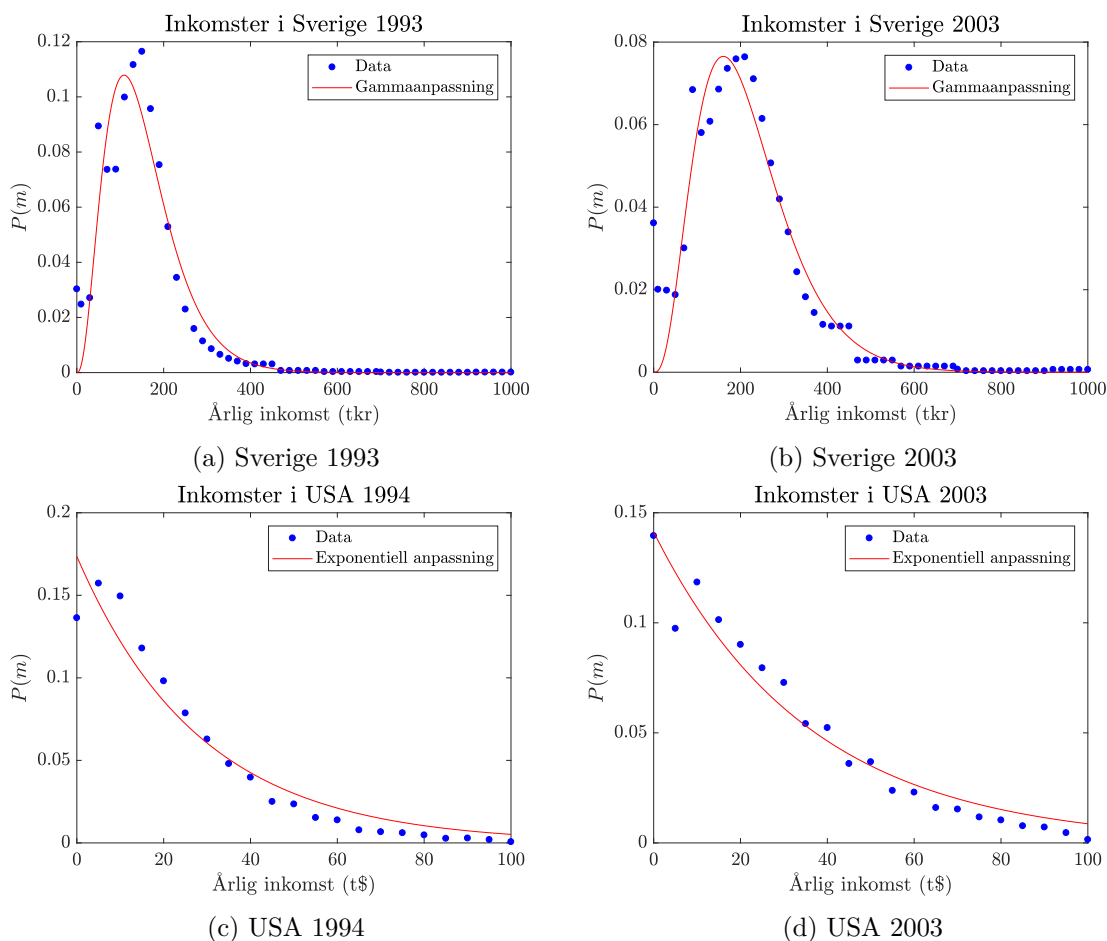
I fig. 11a ses hur  $S$  förändras då iterationerna fortgår, detta vid simulering av förmögenhetsskatterna från fig. 10. Som nämnts ovan minskar entropin då beskattningen ökar. I fig. 11b visas hur ginikoefficienten  $G$  förändras då förmögenhetsskatten ökar från 0 till 10%. Märkbart är att kurvan planat ut fullständigt vid en beskattningsgrad på cirka 8%. Ytterligare ökning av beskattningen resulterar inte i att  $G$  blir mindre. Av kurvans lutning framgår att ökning av beskattningen är som mest effektiv i intervallet 0-5%.

Märkbart är att redan vid ganska låga skattesatser erhöles en stor minskning av ginikoefficienten  $G$ , detta trots att skatt dragits vid var 10 000:e iteration. Förmögenhetsskatten utjämnar således ekonomisk ojämlikhet effektivt. Samtliga värden på  $G$  och  $S$  återfinns i tabell 4. Som tidigare gäller att entropin  $S$  maximeras då stationär fördelning uppnåtts. Vidare gäller att den maximala entropin minskar då beskattningen ökar, något som kan förklaras med att beskattningen motverkar oordningen i systemet. Detta medför att entropin minskar.

## 6.5 Dataanpassning

I detta avsnitt presenteras dataanpassningar av inkomststatistik hämtad från Sverige respektive USA, svarande mot skatteåren 1993 eller 1994 samt 2003. Med bakgrund i tidigare resultat finns det anledning att tro att den svenska inkomststatistiken inte är Boltzmannfördelad, detta på grund av det relativt höga skattetrycket i Sverige. Den svenska rådatan kommer från Statistiska Centralbyrån, se [18], och avser den sammanräknade förvärvsinkomsten för individer boende i Sverige det aktuella året. Personer tjugo år eller äldre är inräknade i undersökningen. Den amerikanska rådatan är hämtad från myndigheten US Census Bureau, se [6] och [19], och avser "Total Money Income", det vill säga total inkomst från tjänst, kapital samt eventuella statliga bidrag. Personer femton år eller äldre är medräknade i undersökningen. Anpassningar görs av lämpliga distributionsfunktioner.

Ginikoefficienten beräknas utifrån datan. Resultaten presenteras överskådligt i tabell 5.



Figur 12: Inkomstdistributionen i Sverige respektive USA, svarande mot skatteåren 1993 eller 1994 och 2003, samt lämpliga anpassningar av fördelningsfunktionerna.

Tabell 5: Anpassade distributionsfunktioner  $P(m)$  samt beräknade värden på ginikoefficienten  $G$  för aktuell inkomststatistik. Observera att den svenska fördelningen avser svenska kronor, medan den amerikanska fördelningen avser dollar.

Land	År	Anpassning $P(m)$	$G$
Sverige	1993	$10^{-5}m^{2.5}e^{-m/44}$	0.54
	2003	$7 \cdot 10^{-7}m^{2.5}e^{-m/64}$	0.36
USA	1994	$0.04e^{-m/28}$	0.58
	2003	$0.14e^{-m/36}$	0.48

Det framgår tydligt från fig. 12 och anpassningarna i tabell 5 att inkomstfördelningen i Sverige år 1993 samt år 2003 var gammafördelad med en formparameter  $k = 3.5$ . Det gäller dock inte att antalet individer utan inkomst i Sverige är lika med noll, vilket skulle förväntas av en gammafördelad variabel. Det finns alltså fler individer utan beskattningsbar inkomst än förväntat, vilket delvis kan förklaras av att inkomster så som studiemedel ej ingår i den sammanräknade förvärvsinkomsten. Studenter framstår därför i statistiken som mindre förmögna än vad de egentligen är, vilket ökar antalet individer inom de riktigt låga

inkomstintervallen. Ginikoefficienten var 0.54 år 1993 samt 0.36 år 2003.

Motsvarande fördelning i USA var år 1994 likväl som år 2003 tydligt exponentialfördelad (vilket svarar mot en formparameter  $k = 1$ ), samtidigt som medelårsinkomsten (pengatemperaturen) ökade från 28 000 dollar till 36 000 dollar. Ginikoefficienten minskade under perioden från 0.58 till 0.48. Intressant är att de båda ländernas formparametrar  $k$  ej förändrats under perioden. Sverige har ett högre värde på sin formparameter, 3.5, än USA. Notera att ginikoefficienten hos båda länderna minskade under den undersökta perioden, samt att Sveriges ginikoefficient var lägre än den amerikanska.

## 6.6 Sammanfattning och tolkning

I detta avsnitt har det undersökts hur olika typer av beskattning påverkar pengafördelningens utseende, entropin samt den monetära jämlikheten. Initialt föreslogs en ny, generaliserad entropi i vilken hänsyn togs till att beskattning påverkar mikrotillståndens tillgänglighet. Genom maximering av denna förutsågs att beskattning skulle medföra att pengarna blev gammafördelade istället för Boltzmannfördelade. Därefter gjordes en rad simuleringar av inkomst- respektive förmögenhetsskatt, vilka utgick från den inledande agentbaserade modellen från kapitel 4. Det visade sig att införandet av skatt (oavsett om det gällde inkomstskatt eller förmögenhetsskatt) resulterade i att den från början exponentialformade pengafördelningen istället blev gammafördelad. Då beskattningen ökade, ökade initialt denna gammafördelnings formparameter  $k$ : ju högre skatt, desto större  $k$ .

Genom de agentbaserade simuleringarna undersöktes också hur ginikoefficienten  $G$  påverkades då skatten ändrades. Den monetära jämlikheten visade sig påverkas olika mycket vid en skatteökning beroende på hur hög skatten redan är. Det visade sig också att sambandet mellan  $G$  och inkomstskatten respektive förmögenhetsskatten ser ganska lika ut;  $G$  minskar snabbast i början av skatteintervallet och planar därefter ut. Denna observation är mycket intressant ur en samhällsekonomisk synvinkel. Även om den modell som använts här endast erbjuder en mycket förenklad bild av verkligheten finns det ändå någonting att lära sig från den. Förändring av beskattningen påverkar den monetära jämlikheten olika effektivt beroende på typ av skatt och på beskattningsintervallet.

Slutligen undersöktes inkomstfördelningen i Sverige samt i USA svarande mot skatteåren 1993 eller 1994 och 2003. Det visade sig att den svenska inkomstfördelningen bäst representerades av en gammafördelning, medan den amerikanska datan var exponentialfördelad. Ginikoefficienten sänktes inom respektive land för de undersökta åren. Som förväntat visade det sig att den svenska ginikoefficienten var något lägre än den amerikanska, vilket motsvarar att den svenska inkomstfördelningen är mer jämlik.

Jämförelse med färdigberäknade värden på ginikoefficienterna hämtade från Statistiska Centralbyrån [20] och Statista [21] visar dock att de korrekta värdena för Sverige är  $G \approx 0.23$  för 1993 och  $G \approx 0.25$  för 2003, medan motsvarande amerikanska värden för USA är  $G \approx 0.46$  för 1994 och  $G \approx 0.46$  för 2003. De här beräknade värdena skiljer sig alltså något från motsvarande publicerade värden. Detta skulle kunna bero på att särskilt den svenska inkomststatistiken är indelad i ganska grova intervall; detsamma gäller i viss mån även den amerikanska. Vid beräkningen av  $G$  har individerna inom varje intervall antagits ha en inkomst lika stor som medelinkomsten för det intervallet. Grova inkomstintervall medför ett större fel i beräkningen, vilket skulle kunna förklara varför felet i USA:s beräknade ginikoefficient här blivit mindre än motsvarande värde i det svenska fallet. Den svenska datan är mindre finfördelad än den amerikanska.



## 7 Tvåklassamhälle och Paretofördelningen

Tidigare kapitel har syftat till att utreda huruvida pengars spridning kan jämföras med energifördelning över partiklar, det vill säga om pengar fördelar sig enligt Boltzmannfördelningen. Teoretiska resonemang, empirisk data och simuleringsmodeller har presenterats; dessa visar på en korrespondens mellan hur pengar och energi fördelar sig. Tidigare studier har dock visat på en oväntad aspekt: att Boltzmannfördelningen inte är det bästa sättet att beskriva pengarnas fördelning inom de rikaste procenten av befolkningen. Data från bland annat USA, Tyskland och Japan [22] har visat att den så kallade Paretofördelningen ger en bättre beskrivning av pengafördelningen hos de rikaste procenten av befolkningen. Paretofördelningen avtar som en potens av  $m$ , därmed avtar inte fördelningen lika snabbt för stora  $m$  jämfört med Boltzmannfördelningen. En fördelning med så kallad Paretosvans, det vill säga Paretofördelning för de rikaste procenten, kommer därför innehålla fler agenter med mycket pengar kontra en Boltzmannfördelning utan Paretosvans. Det är av intresse att undersöka detta vidare, och vi tar därmed ett steg tillbaka från fysiken. Resultatet, att befolkningen kan beskrivas med två olika pengafördelningar, skulle kunna ses som ett matematiskt sätt att definiera klasser i samhället.

Detta kapitel syftar till att studera möjliga orsaker till att inkomstfördelningen uppvisar två separata strukturer, med fokus på att undersöka varför Paretosvansen uppkommer för de rikaste procenten av populationen. Tillvägagångssättet blir således att justera grundmodellen från kapitel 4 till en modell vars utbytesregler resulterar i en fördelning med den eftersträlvade strukturen. Vidare kommer entropin och ginikoefficienten beräknas för fördelningarna och jämföras med motsvarande storheter för den grundsimulering som ger Boltzmannfördelade inkomster.

### 7.1 Paretofördelningen

Paretofördelningen kallas sannolikhetsfördelningen som är uppkallad efter den italienske civilingenjören Vilfredo Pareto. För en Paretofördelad stokastisk variabel ges sannolikheten för utfall  $m$  av

$$P(m) = \frac{\alpha m_{min}^\alpha}{m^{\alpha+1}},$$

där  $\alpha$  är en formparameter även känd som Paretoindex. Detta gäller för  $m \in M$  där  $M$  är utfallsrummet och  $m_{min}$  är minsta värdet i  $M$ . Till skillnad från Boltzmannfördelningen som tidigare diskuterats har inte Paretofördelningen någon koppling till energi- och entropibegreppen. Således härleds inte Paretofördelningen genom att betrakta fysikaliska fenomen, utan den har uppkommit som ett matematiskt verktyg för att beskriva observerade distributioner. Paretofördelningen har dock en naturlig relation till Boltzmannfördelningen. Om  $X$  är en Paretofördelad stokastisk variabel med minsta utfallsvärde  $m_{min}$  så följer slumpvariabeln  $Y = \log\left(\frac{X}{m_{min}}\right)$  en exponentialfördelning. Relationen lyder

$$P(Y < y) = P\left(\log\left(\frac{X}{m_{min}}\right) < y\right) = P(X < m_{min}e^y) = 1 - e^{-\alpha y}.$$

Vid dataanpassning kan det underlätta att betrakta en kumulativ sannolikhetsfördelning istället för sannolikhetstäthet, särskilt om den aktuella datan inte är uppdelad i intervall av konstant storlek. Vidare gäller att den komplementära kumulativa sannolikhetsfördelningen i ekv. (28) åskådliggör Paretosvansen på ett tydligare sätt än vad den kumulativa sannolikhetsfördelningen gör. Paretofördelningens komplementära fördelning ges av

$$F(m) = \int_m^\infty P(x)dx = \left(\frac{m_{min}}{m}\right)^\alpha. \quad (28)$$

Logaritmeras båda leden i ekv. (28) fås följande:

$$\log(F(m)) = \alpha \log(m_{min}) - \alpha \log(m) .$$

Relationen implicerar att om både  $F(m)$  och  $m$  logaritmeras är deras förhållande proportionellt mot  $\alpha$ . Egenskapen är användbar då den kan användas för att identifiera Paretofördelningen, ty i en log-logskala följer Paretofördelad data en rät linje.

## 7.2 Agentbaserad modell

I kapitel 4 presenterades grundmodellen för pengabyte i en population. Kärnan i denna modell ligger i liknelsen mellan partiklars energiutbyte och pengautbyte. Viktiga aspekter i modellen var således att pengar är konserverade och att agenterna har lika förutsättningar att ta och ge pengar. En generell formel för bytesregler, där de diskuterade aspekterna övervägdes, blev därmed

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + \Delta m \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - \Delta m . \end{aligned} \tag{29}$$

I grundmodellen valdes  $\Delta m = 1$  vilket innebar att pengabytena var konstanta till belopp. Grundmodellen gav ett resultat där pengar fördelades enligt Boltzmannfördelningen. I detta avsnitt presenteras en ny modell inspirerad av Chatterjee et al. [23], vars syfte är att finna bytesregler som ger upphov till Paretosvansen. Även i denna modell antas pengar vara konserverade, varför utbytesreglerna ovan fortfarande gäller. Skillnaden mellan modellerna ligger således i uttrycket för  $\Delta m$ . I denna modell är  $\Delta m$  givet av

$$\Delta m = \epsilon(1 - \lambda_j)m_j(t) - (1 - \epsilon)(1 - \lambda_i)m_i(t) . \tag{30}$$

Med  $\Delta m$  definierad enligt ekv. (30) fås att mängden pengar som ingår i varje byte beror på de tre parametrarna  $\lambda_i, \lambda_j \in (0, 1)$  och  $\epsilon \in (0, 1)$ . Transaktionens storlek varierar alltså från gång till gång, även om pengarna alltid är konserverade. Parametrarna  $\lambda_i$  och  $\lambda_j$  beskriver den så kallade sparandetendensen hos agent  $i$  respektive  $j$  mellan vilka transaktionen sker, och  $\lambda$  kan därmed ses som en agentspecifik parameter. Som namnet på parametern  $\lambda$  antyder beskriver  $\lambda_i$  sparande för agent  $i$ , detta eftersom parametern reglerar hur stor andel pengar som agenten får spara i varje byte. Beroende på hur  $\lambda$  väljs kommer agenterna att vara urskiljbara, vilket medför att denna modell kommer skilja sig från de som diskuterats tidigare. Den tredje parametern  $\epsilon$  är till skillnad från de andra två parametrarna inte agentspecifik utan karakteriserar själva bytet. I kommande simuleringar antas  $\epsilon$  genomgående vara en likformigt fördelad slumpvariabel, som uppdateras inför varje byte, medan  $\lambda$  ändras på olika sätt. Valet av  $\epsilon$  medför en byteshandel där transaktionerna varierar mellan att vara stora och små relativt hur mycket pengar agenterna har. Ett specialfall för modellen är då  $\lambda_i = \lambda_j = \lambda$ , med andra ord då alla agenter har lika stor fallenhet att spara pengar. För det beskrivna fallet ges då  $\Delta m$  av följande uttryck:

$$\Delta m = (1 - \lambda)[\epsilon(m_j(t) + m_i(t)) - m_i(t)] . \tag{31}$$

För  $\lambda = 0$  och med  $\epsilon$  givet av

$$\epsilon = \frac{m_i(t) + 1}{m_i(t) + m_j(t)}$$

fås följande bytesregler:

$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t) + 1 \\ m_j(t+1) &= m_j(t) - 1 , \end{aligned}$$

vilka exakt beskriver bytesreglerna för den första agentbaserade modellen i kapitel 4. Därmed kan modellen presenterad i kapitel 4 ses som ett specialfall av modellen vars bytesregler ges av ekv. (29) med  $\Delta m$  givet av ekv. (30). Specialfallet medför att pengarna blir Boltzmannfördelade. I kommande avsnitt presenteras resultat från simulering av denna modell för olika val av  $\lambda$ . Det hela resulterar i identifiering av de parameterintervall som medför en fördelning som uppvisar den eftersökta Pareto svansen.

### 7.3 Resultat - agentbaserad modell

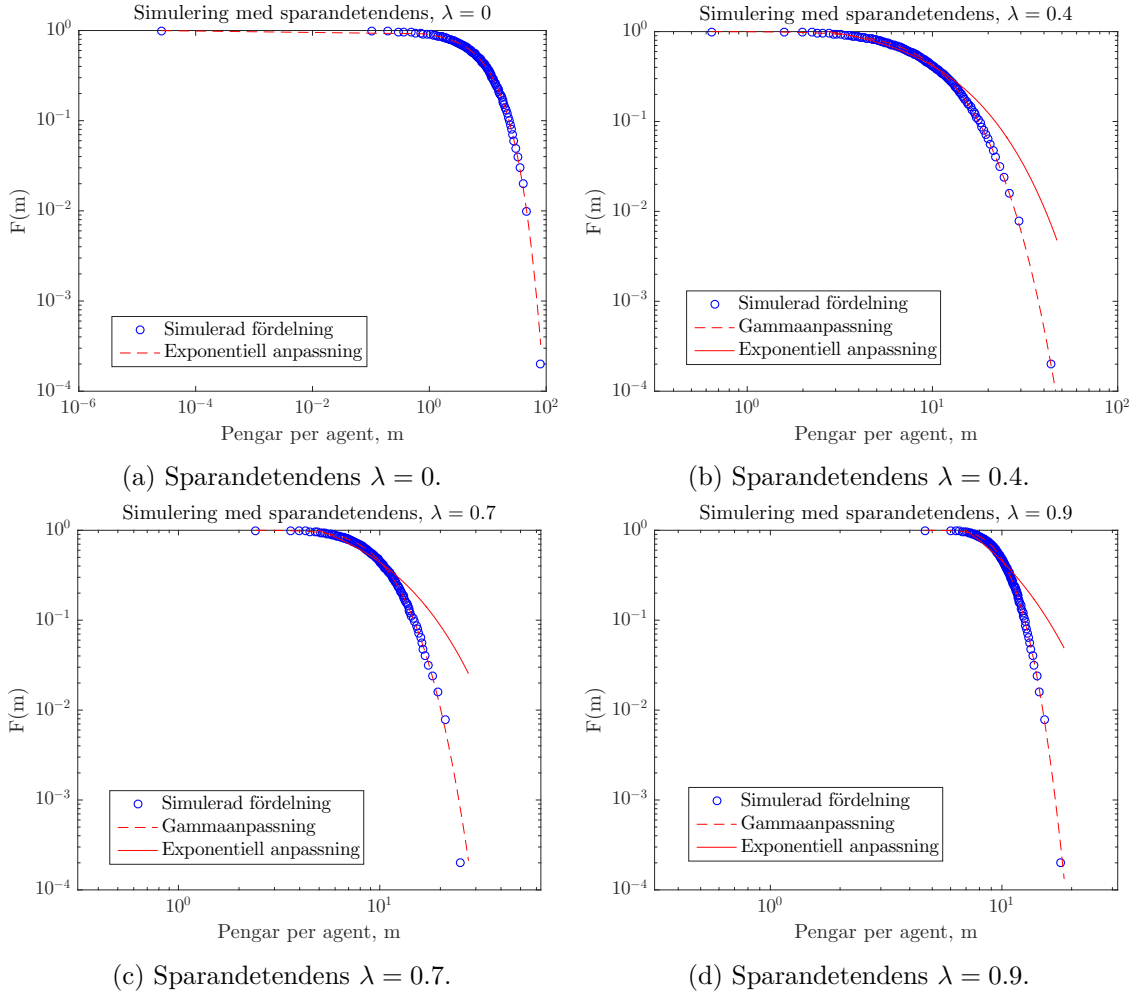
I detta avsnitt presenteras resultat från simuleringar av den agentbaserade modell som introducerades i föregående avsnitt. Syftet med modellen är att undersöka vilka faktorer som orsakar Pareto svansen. Med detta i åtanke har tre olika typer av parameterintervall studerats. Resultaten för de olika studierna presenteras i följande ordning: först presenteras resultatet då  $\lambda$  är lika för alla agenter. Därefter presenteras resultatet då  $\lambda$  bestäms slumpmässigt ur en likformig fördelning. Till sist presenteras resultatet då  $\lambda$  väljs likformigt som i föregående modell, men nu endast för en viss andel av agenterna. Övriga agenter får  $\lambda = 0$ . För varje simulering ges resultaten i form av plottar över den komplementära kumulativa fördelningen  $F(m)$  i log-logskala. Utöver detta beräknas även sannolikhetsfördelningens ekvation enligt

$$P(m) = -\frac{dF(m)}{dm},$$

då användandet av  $P(m)$  istället för  $F(m)$  underlättar jämförelse med resultat från tidigare kapitel. Av samma anledning beräknas utifrån  $P(m)$  även entropin,  $S$ , och ginikoefficienten,  $G$ , som definierades i avsnitt 6.2. Alla resultat är beräknade för simuleringar där antal agenter är  $N = 5000$  och antal iterationer/tidssteg är 10 miljoner. Vidare är begynnelsevärdet för alla agenter 10 pengaeenheter, vilket ger medelvärdet  $T_m = 10$  pengaeenheter. De simulerade resultaten anpassas efter de komplementära kumulativa fördelningarna svarande mot Boltzmannfördelningen, gammafördelningen eller Paretofördelningen.

#### 7.3.1 Simulering 1: Alla agenter har samma sparandetendens

Vid denna första simulering antas alla agenter ha samma  $\lambda$ , det vill säga  $\lambda_i = \lambda_j = \lambda \forall (i, j) \in N$ . Antagandet innebär att bytesreglerna ges av ekv. (31). Nedan visas resultatet från simulering för fyra olika val av  $\lambda$ , nämligen för  $\lambda = 0, 0.4, 0.7$  och  $0.9$ .



Figur 13: Komplementär kumulativ fördelning  $F(m)$ , i log-logskala, anpassad efter resultatet från simuleringarna. Alla agenter antas ha lika stor sparandetendens.

Tabell 6: Bästa anpassning av  $P(m)$ , värdet på ginikoefficienten  $G$  samt slutvärdet på entropin  $S$ .

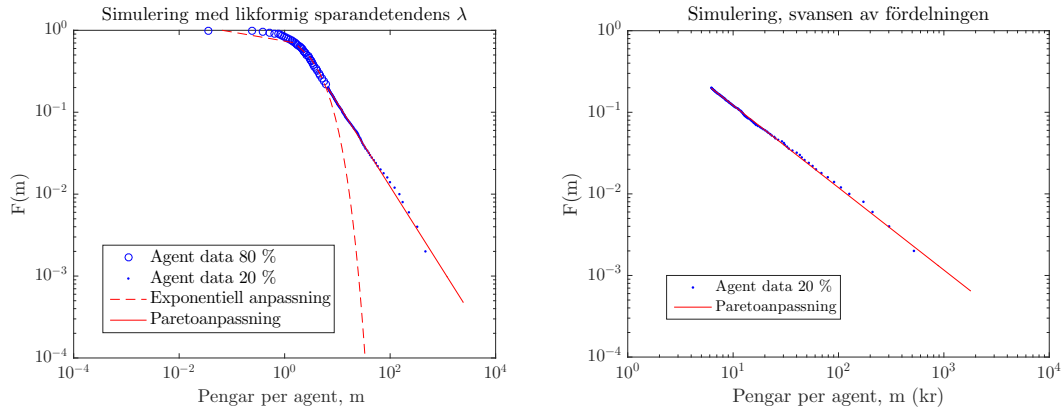
$\lambda$	$P(m)$	$G$	$S$
0	$0.1e^{-m/10}$	0.51	$1.65 \cdot 10^4$
0.4	$0.01m^{3.00-1}e^{-m/3.32}$	0.31	$1.52 \cdot 10^4$
0.7	$3.5 \cdot 10^{-5}m^{7.94-1}e^{-m/1.26}$	0.20	$1.32 \cdot 10^4$
0.9	$5.8 \cdot 10^{-16}m^{27.4-1}e^{-m/0.36}$	0.11	$1.03 \cdot 10^4$

Genom att betrakta resultaten av simuleringarna i fig. 13 kan slutsatsen dras att bytesregler där alla agenter har lika  $\lambda$  inte medför Pareto-svans, detta då punkterna inte fördelar sig längs en linje i fig. 13. Istället fås att Boltzmannfördelningen är den bästa anpassningen då  $\lambda = 0$ , medan pengarna följer en gammafördelning för övriga  $\lambda$ . I tabell 6 ges de exakta uttrycken för sannolikhetsfördelningarna. Betraktas nu värdet på ginikoefficienten konstateras att fördelningen blir mer jämlik då agenterna har högre sparandetendens eftersom  $G$  avtar med växande  $\lambda$ , se tabell 6. Studera nu entropin för olika  $\lambda$ . I kapitel 3 visades att ett system vars fördelning följer Boltzmannfördelningen har maximal entropi,

vilket här medför att  $\lambda = 0$  maximerar entropin. Från tabell 6 fås dessutom att entropin avtar för växande  $\lambda$ , med andra ord begränsas antalet tillstånd för agenter att befinna sig i då sparandetendensen  $\lambda$  ökar.

### 7.3.2 Simulering 2: Likformigt fördelad sparandetendens

Nu undersöks fallet då agenter har olika stor tendens att spara pengar. Detta realiseras genom att låta  $\lambda_i$  vara likformigt fördelade slumpstal för alla agenter. Då agenterna antas ha olika  $\lambda$  används den allmänna formen för  $\Delta m$  från ekv. (30). I figuren nedan presenteras resultatet av simuleringen.



(a)  $F(m)$  i log-logskala, samtliga agenter.

(b)  $F(m)$  för de rikaste 20% av agenterna.

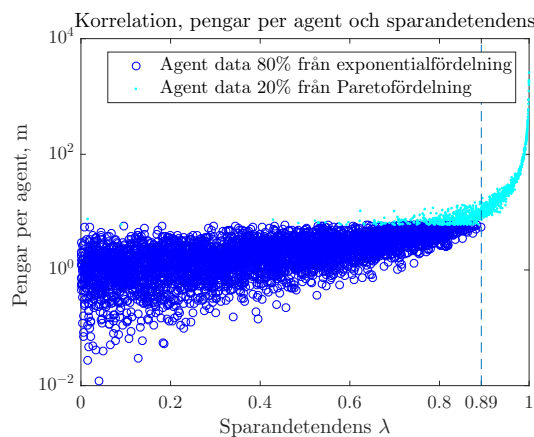
Figur 14: Den komplementära kumulativa fördelningen  $F(m)$ , i log-logskala. Anpassningar har gjorts mot både exponential- och Paretofördelningen. Sparandetendensen  $\lambda$  är här likformigt fördelad för alla agenter. En separat plot har gjorts för att tydligare visa Paretoanpassningen för de 20% av agenterna som har mest pengar.

Tabell 7: Bästa anpassning av  $P(m)$ , värdet av ginikoefficienten  $G$  samt slutvärdet av  $S$ .

$\lambda$	$P(m)$ , exponentiell anpassning	$P(m)$ , Paretoanpassning	$G$	$S$
Likformigt fördelad	$0.34e^{-m/3.14}$	$1.10 \cdot m^{-(1.01+1)}$	0.80	$1.24 \cdot 10^4$

Från fig. 14 observeras att då sparandetendensen  $\lambda_i$  är dragen från en likformig fördelning för alla agenter, fördelar sig pengarna exponentiellt för de 80% av agenterna med minst pengar. Vidare observeras att för de 20% av agenterna med mest pengar följer pengarna en Paretofördelning med  $\alpha = 1.01$ . Entropin för fördelningen var  $S = 1.24 \cdot 10^4$  vilket är lägre än entropin för simulering där alla agenter har  $\lambda = 0$ , se tabell 6. Jämförs ginikoefficienten i tabell 7 med ginikoefficienten då alla agenter har  $\lambda = 0$ , se tabell 6, framgår det att ginikoefficienten är högre för en fördelning med Paretosvans än vad den är för en fördelning utan Paretosvans. Pengafördelningen blir således mer ojämlig då det finns en Paretosvans.

Intressant är att undersöka om  $\lambda$  påverkar vilka agenter som följer Paretofördelningen och vilka som följer Boltzmanfördelningen. För att realisera detta plottades korrelationen mellan pengar per agent  $m$  och sparandetendens  $\lambda$ . Resultatet presenteras i figuren nedan.

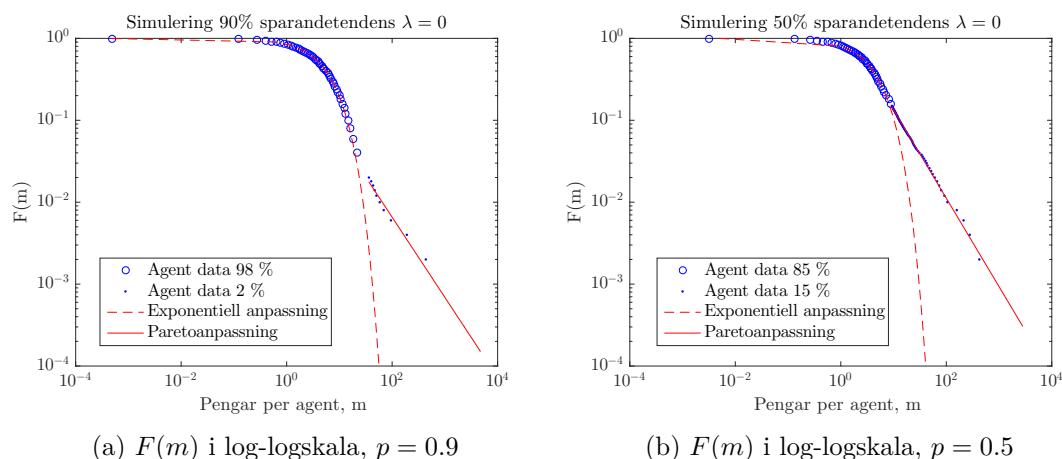


Figur 15: Korrelation mellan pengar per agent  $m$  och sparandetendens  $\lambda$ . De 80 % av agenterna med minst pengar är utritade i mörkblått, och övriga agenter i ljusblått. Den lodräta streckade linjen vid  $\lambda = 0.89$  markerar gränsen för Paretosvansen.

Från fig. 15 framgår det att mängden pengar,  $m$ , som agent  $i$  erhåller vid stationär fördelning är större för en agent med stort  $\lambda$ ; stort  $\lambda$  medför statistiskt sett mycket pengar. Dessutom framgår det från fig. 15 att största andelen agenter i Paretosvansen har  $\lambda \in (0.8, 1)$ . Alla agenter med  $\lambda > 0.89$  tillhör Paretosvansen, vilket förtydligas med den streckade linjen. Agenter med låg sparandetendens kan alltså inte tillhöra den del av populationen vars pengainnehav följer Paretodistributionen.

### 7.3.3 Simulering 3: En viss andel har likformig sparandetendens

Nu undersöks vad som händer när en andel  $p \in (0, 1)$  av agenterna inte har någon sparandetendens, medan övriga agenter  $(1 - p)$  har det. Det vill säga  $\lambda_i = 0$  för agent  $i \in (1, \dots, [pN])$  (där  $[x]$  är närmaste heltal till  $x$ ) och  $\lambda_i$  likformigt fördelat slumpstal för agent  $i \in ([pN] + 1, \dots, N)$ . I fig. 16 nedan presenteras resultatet för  $p = 0.9$  och för  $p = 0.5$ .

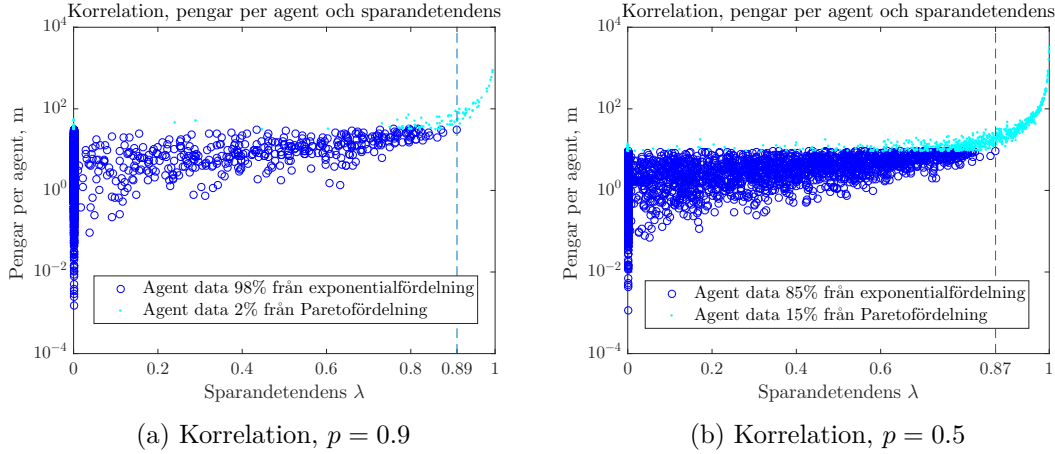


Figur 16: Komplementär kumulativ fördelning  $F(m)$ , i log-logskala med två olika anpassningar. Sparandetendensen  $\lambda$  är likformigt fördelat för en andel  $(1 - p)$  av agenterna.  $\lambda = 0$  för övriga agenter. De mest förmögna agenterna, som svarar mot en Paretosvans, har plottats med små prickar.

Tabell 8: Bästa anpassning av  $P(m)$ , värdet på ginikoefficienten  $G$  samt slutvärdet av  $S$ .

$\lambda$	$P(m)$ , exponentiell anpassning	$P(m)$ , Paretoanpassning	$G$	$S$
$p = 0.9$	$0.18e^{-m/5.56}$	$0.43 \cdot m^{-(0.93+1)}$	0.67	$1.42 \cdot 10^4$
$p = 0.5$	$0.23e^{-m/4.23}$	$1.06 \cdot m^{-(1.03+1)}$	0.76	$1.32 \cdot 10^4$

I fig. 16a presenteras resultatet då 90% av agenterna i simuleringen saknar sparandetendens, det vill säga  $\lambda = 0$  för dessa agenter. Enligt anpassningen följer 98% av agenterna en exponentiell fördelning medan 2% av agenterna följer en Paretofördelning med  $\alpha = 0.93$ . Fig. 16b visar hur pengarna fördelar sig då 50% av agenterna har  $\lambda = 0$ . Anpassningen visar på att 85% av agenterna följer en exponentiell fördelning medan 15% följer en Paretofördelning med  $\alpha = 1.03$ . Simuleringen med  $p = 0.9$  resulterade i entropin  $S = 1.42 \cdot 10^4$  medan  $p = 0.5$  gav entropi  $S = 1.32 \cdot 10^4$ . Vidare framgår det från tabell 8 att ginikoefficienten är lägre för simulering med  $p = 0.9$  än för simulering med  $p = 0.5$ , vilket indikerar att pengafördelningen blir mer jämlik i fallet då fler agenter helt saknar sparandetendens. I fig. 17 visas korrelationen mellan mängden pengar per agent och sparandetendens  $\lambda$ , både för simulering med  $p = 0.9$  och för  $p = 0.5$ .



Figur 17: Korrelation mellan mängden pengar per agent  $m$  och sparandetendens  $\lambda$ . I fig. 17a gäller att alla agenter med  $\lambda > 0.89$  tillhör Paretosvansen; för fig. 17b är motsvarande gränsvärde  $\lambda = 0.87$ . Notera att de agenter som tillhör Paretosvansen är utritade med speciella, ljusblå, markörer.

Från fig. 17 dras samma slutsats som från korrelationsplotten i fig. 15, nämligen att stort  $\lambda$  medför en tendens att ha mycket pengar när simuleringen nått jämvikt. Resultatet från fig. 17 ger dessutom förklaring till relationerna 98% exponentiellt fördelade kontra 2% Paretofördelade och 85% exponentiellt fördelade kontra 15% Paretofördelade när  $p = 90\%$  respektive  $p = 50\%$  har  $\lambda = 0$ . Figuren implicerar nämligen att det är hur stor andel agenter som har  $\lambda$  större än cirka 0.85 som avgör storleken på Paretosvansen, inte hur stor andel som har  $\lambda \neq 0$ .

### 7.3.4 Resultat och sammanfattning för de tre simuleringarna

Resultaten från de tre simuleringarna implicerar att Paretosvansen uppkommer i pengafördelningen om agenter antas ha olika sparandetendens  $\lambda$ . Jämför resultaten från simulering 2 och simulering 3 konstateras att andelen agenter i Paretosvansen ökar då andelen agenter med stor sparandetendens  $\lambda$  ökar. Jämför nu ginikoefficienterna från simulering 2 och

simulering 3, se tabell 7 och tabell 8, konstateras att ginikoefficienten minskar med andelen agenter i Pareto svansen. Med andra ord: fördelningen med få agenter tillhörande Pareto svansen är mer jämlik.

Betrakta nu entropin. I simulering 1, där  $\lambda = 0$  för alla agenter, erhöles den högsta entropin med ett värde på  $S = 1.64 \cdot 10^4$ . Denna simulering var även den som gav upphov till Boltzmannfördelningen. I kapitel 3 konstateras att entropin är maximerad för denna fördelning; de andra fördelningarna gav lägre entropi. Därmed fastslås att entropin för jämviktfordelningen inte är maximal då  $\lambda$  väljs lika men nollskild för alla agenter, eller då  $\lambda = 0$  för en andel av agenterna men nollskild för övriga. Resultatet antyder att om inte agenter som möts i ett byte har samma förutsättningar, kommer inte pengarna sprida sig på så sätt att maximal entropi uppnås.

#### 7.4 Tolkning av simulering: varför uppkommer Pareto distributionen?

I föregående avsnitt presenterades resultat från den agentbaserade modellen som definieras i avsnitt 7.2. Huvudsakligen låg fokus på att undersöka hur  $\lambda$  påverkar fördelningen, därför presenterades resultat från simuleringar där  $\lambda$  karakteriserats på tre olika sätt. Först studerades hur fördelningen påverkades då  $\lambda$  var konstant och lika för alla agenter. Därefter presenterades fördelningen för en modell med  $\lambda$  likformigt fördelad för alla agenter. Till sist presenterades även fördelningen som uppstod då en andel av agenterna hade en nollskild och likformigt fördelad sparandetendens. Sammanfattningsvis påvisades att då alla agenter har nollskild sparandetendens kommer pengarna spridas mer jämnt över systemet. Vidare observerades att då  $\lambda$  valdes olika för agenterna så uppstod en Pareto svans i fördelningen.

I detta avsnitt undersöks modellens parametrar med fokus på  $\lambda$  för att ge en förklaring till resultaten. För att åskådliggöra hur  $\lambda$  påverkar agenterna betraktas ekvationerna nedan:

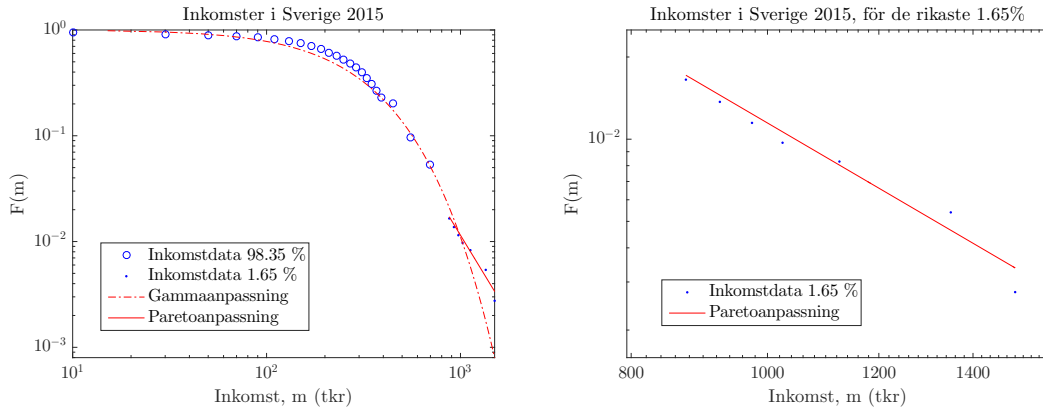
$$\begin{aligned} m_i(t+1) &= m_i(t)(\lambda_i + \epsilon - \epsilon\lambda_i) + m_j(t)\epsilon(1 - \lambda_j) \\ m_j(t+1) &= m_j(t)(1 - \epsilon(1 - \lambda_j)) + m_i(t)(1 - \lambda_i)(1 - \epsilon) . \end{aligned} \tag{32}$$

Dessa bytesregler är väsentligen bytesreglerna som ges i ekv. (29) kombinerade med uttrycket för  $\Delta m$  i ekv. (30). Från första raden ekv. (32) observeras följande: det gagnar agent  $i$  ifall  $\lambda_i$  är stor, detta eftersom  $\lambda_i + \epsilon - \epsilon\lambda_i$  är en växande funktion i  $\lambda_i \in (0, 1)$  då  $\epsilon \in (0, 1)$ . Vidare ger den andra termen på samma rad att det är fördelaktigt för agent  $i$  ifall  $\lambda_j$  är liten. Liknande slutsatser kan dras för agent  $j$  utifrån ekvationens andra rad. Sammanfattningsvis implicerar bytesreglerna i ekv. (32) att agenterna gynnas av att deras egna  $\lambda$  är stora, samtidigt som den andra agenten i bytet har litet  $\lambda$ , eftersom de då kommer att ha kvar mer pengar vid ett byte. Här fås en situation där en agent med mycket pengar tjänar mer i varje byte; analysen av ekvationerna stämmer därmed väl överens med resultaten från simuleringen.

#### 7.5 Dataanpassning

För att validera modellens trovärdighet, med fokus på att undersöka rimligheten av inkomstfördelningar med Pareto svans, så har svensk inkomstdata undersökts. I fig. 18 presenteras statistik över den svenska inkomstfördelningen år 2015. I fig. 18a visas den komplementära kumulativa fördelningen,  $F(m)$ , från ekv. (28), i log-logskala. I fig. 18b illustreras svansen av fördelningen plottad i log-logskala. Vidare ges anpassningarnas sannolikhetsfördelning i tabell 9. Datan är hämtad från Statistiska Centralbyrån [24].





(a)  $F(m)$  för alla inkomsttagare i Sverige, i log-logskala.

(b)  $F(m)$  för de 1.65% av befolkningen med högst inkomster i Sverige, i log-logskala.

Figur 18: Figurerna visar den komplementära kumulativa fördelningen  $F(m)$ , för svenska inkomsttagare. Först visas hela fördelningen och sedan endast de rikaste procenten.

Tabell 9: Bästa anpassning  $P(m)$ .

Land	År	$P(m)$ , Gammaanpassning	$P(m)$ , Paretoanpassning
Sverige	2015	$4.1 \cdot 10^{-4} m^{1.53-1} e^{-m/177.74}$	$3.67 \cdot 10^7 \cdot m^{-(3.01+1)}$

I fig. 18 syns att den svenska inkomstfördelningen tenderar att uppvisa två strukturer. För de rikaste procenten av sveriges befolkning beskriver en Paretofördelning med  $\alpha = 3.01$  inkomstfördelningen väl. Majoriteten av svenska inkomsttagare har dock inkomster som följer gammalfördelningen. Se tabell 9 för de exakta uttrycken. Som nämns i inledningen har tidigare undersökningar av inkomstdata från andra länder även de påvisat en Pareto-svans. I USA, England och Tyskland har det visats att 1 till 3% av befolkningen följer Pareto-fördelningen [25] [22]. Detta stämmer överens med de ovan presenterade resultaten. Den svenska inkomstdata skiljer sig dock från inkomstdata från USA, England och Tyskland i en aspekt: i Sverige är gammalfördelningen den bästa anpassningen för majoriteten medan Boltzmannfördelningen ger en bättre representation av inkomsterna i de tre andra länderna.

## 7.6 Sammanfattning och tolkning

I detta kapitel vidareutvecklades den grundläggande simuleringsmodellen i syfte att kunna presentera en modell där Pareto-svansen uppkommer. I avsnitt 7.3 presenterades resultaten från modellen; där framgick att då sparandetendensen  $\lambda$  väljs så att en andel av agenterna saknar sparandetendens, det vill säga  $\lambda = 0$  för en andel av agenterna, så uppkommer Pareto-svansen i fördelningen. Därefter tolkades parametrarnas betydelse för fördelningen i avsnitt 7.4. Från tolkningen konstaterades att Pareto-svansen uppkommer då olika agenter har olika förmåga att tjäna pengar i varje byte, nämligen då en agent med mycket pengar har lättare att tjäna pengar än vad en agent med lite pengar har. Dessutom beräknades entropin för varje simulerad fördelning, något som visade på att entropin blir mindre i modeller där Pareto-svansen uppkommer. Bytesreglerna för denna modell innebär att agenterna har varierande förmåga att tjäna pengar. På grund av detta blir agenterna urskiljbara och systemet kan inte längre fördela sig så att maximalt antal tillstånd ockuperas. Detta begränsar entropin för systemet.

I avsnitt 7.5 presenterades svensk inkomstdata. Det visade sig att även den svenska

inkomstfördelningen tenderade att uppvisa två strukturer, där de rikaste procentens inkomster följer Paretofördelningen. Inkomstfördelningen för Sverige överensstämmer därmed med den tredje simuleringens resultat. Det är troligt att samma drivkraft som ger upphov till Paretosvansen i modellens också orsakar uppkomst i datan. Paretosvansen i den svenska datan kan därmed, analogt med modellen, vara en följd av att personer med mycket pengar har lättare att tjäna mer pengar. Om vi reflekterar över hur ekonomin fungerar verkar resultatet rimligt; en person som har mycket pengar kan investera dessa och tjäna ännu mer pengar.

Värt att notera är att de simulerade resultaten i ett avseende skiljer sig från den svenska inkomststatistiken. Detta gäller formen hos den rikedomsfördelning som gäller för majoriteten av agenterna, de som inte hör till Paretosvansen. Resultatet från den agentbaserade simuleringen visar att pengarna hos majoriteten av agenterna är exponentialfördelade, medan den svenska datan visar att majoritetens inkomst är gammafördelad. Denna skillnad kan förklaras med hjälp av det generella entropibegreppet som presenterades i kapitel 6.

Det faktum att befolkningens inkomster kan beskrivas av två olika fördelningar ses som en följd av att inkomsten genereras på olika sätt. Majoriteten av befolkningen arbetar för att försörja sig; en tjänst de utför som anställda inom en organisation bedöms ha ett visst värde och de kompenseras därefter. De rikaste procenten av befolkningen behöver, tack vare sin förmögenhet, inte arbeta i den klassiska bemärkelsen. Deras inkomst generas istället generellt genom investering eller som ränta på de tillgångar de redan förfogar[26]. En agent med stor förmögenhet kommer tack vara detta få en markant större inkomst och på så sätt ökar agentens chans att bli rik ytterligare. Detta skulle kunna uttryckas som rena motsatsen till Boltzmannfördelningen, där sannolikheten att öka sin förmögenhet avtar snabbt. Detta gör även att Paretosvansen är starkt beroende av börsmarknaden. Till skillnad från exponential- och gammafördelningen, som är så gott som stationära, har det observerats att Paretofördelningen fluktuerar och tenderar att svälla upp eller krympa i takt med börsen [3].

## 8 Diskussion och slutsats

Målet med detta arbete var att med hjälp av metoder hämtade från statistisk fysik förklara aspekter hos komplexa ekonomiska system. I strävan att uppnå detta mål inleddes arbetet med att grundligt förklara viktiga begrepp från den statistiska fysiken, så som multiplicitet och entropi. Det argumenterades för att maximering av entropin är ekvivalent med att finna det mest sannolika makrotillståndet för ett stort system. Det mest sannolika makrotillståndet avgör i sin tur stationärtillståndet, vilket i det enklaste fallet visade sig karaktäriseras av Boltzmannfördelningen. Värt att notera här är att en helt uniform fördelning svarar mot ett enda mikrotillstånd och att denna fördelning därmed faktiskt är mest osannolik. Intuitivt kan man tycka att tillgångar bör fördelas jämnt över en befolkning men detta stämmer inte; med fria transaktioner kan en uniform fördelning endast uppnås då man omfördelar förmögenhet med hjälp av till exempel skatter eller bidrag.

Utifrån denna teori presenterades en agentbaserad grundmodell, som på ett enkelt sätt modellerade utbyte av pengar. En simulering av denna modell resulterade i att pengarna fördelade sig över agenterna enligt Boltzmannfördelningen, precis som förutsagts analytiskt. Därmed kunde slutsatsen dras att den grundläggande simuleringsmodellen väl approximerade det verkliga utbytet av pengar mellan individer. För att ytterligare styrka att modellen ger en rättvis bild av hur pengar sprider sig i verkligheten jämfördes det simulerade resultatet med inkomststatistik från USA. Då denna inkomstfördelning visade tydliga tendenser att vara Boltzmannfördelad ansågs modellens trovärdighet vara validerad.

Ovan nämnda resultat, att tillgångarna distribueras enligt Boltzmannfördelningen, implicerade att pengar i ett samhälle faktiskt sprider sig över befolkningen på samma sätt som energi sprider sig över partiklar i en gas. Det var därefter intressant att undersöka huruvida modellen kunde modifieras på olika sätt så att fler ekonomiska fenomen kunde få en förklaring kopplad till maximering av entropin.

Som en första modifiering av modellen undersöktes fenomenet skuld. Det var då naturligt att dela upp tillstånden i två kategorier, en för tillstånd med negativa pengavärden och en för tillstånd med positiva sådana. Detta steg påverkade uttrycket för multipliciteten, varför uttrycket för entropin också fick modifieras. Analytisk maximering av denna entropi resulterade i två möjliga distributioner, en för negativa och en för positiva penningvärden. De båda lösningarna visade sig vara Boltzmannfördelade. Skulden förutsågs därför vara Boltzmannfördelad, liksom de positiva pengarna. Agentbaserad simulering samt svensk statistik styrkte detta antagande, varför det kunde konstateras att maximering av entropin kunde användas för att motivera välståndsfördelningen även i detta fall.

Efter detta undersöktes pengafördelningen sedan skatt introducerats. Det konstaterades att de olika mikrotillstånden inte längre var lika tillgängliga, vilket medförde att makrotillståndet med den största multipliciteten inte längre sammanföll med stationärtillståndet. Maximering av entropin kunde därför inte användas rakt av. Istället introducerades en ny, modifierad multiplicitet genom att multiplicera den vanliga multipliciteten med en viktningfaktor. En ny, viktad entropi definierades utifrån denna viktade multiplicitet och på så sätt erhöles ett nytt uttryck för motsvarande stationärfördelning. Det visade sig finnas goda indikationer på att denna följde gammafördelningen. Simuleringar av inkomst- respektive förmögenhetsskatt resulterade också i en gammafördelad distribuering. Jämförelse av inkomststatistik från Sverige och USA visade att de svenska inkomsterna är gammafördelade, medan distributionen av amerikanska inkomster bättre följer Boltzmannfördelningen. Då den svenska skattenivån är högre än den amerikanska styrker detta teorin att beskattning resulterar i en gammaformad pengafördelning.

Slutligen studerades pengafördelningen hos de rikaste procenten av populationen. Det

är sedan länge känt att pengarna hos denna andel av befolkningen är Paretofördelade [4]. Genom justering av utbytesreglerna för grundmodellen på ett sådant sätt att förmögna agenter lättare kunde tjäna mer pengar än mindre förmögna agenter, kunde en sådan pengafördelning erhållas genom simulering. Det visade sig att entropin hos den stationära Paretofördelningen var lägre än för den exponentialfördelade stationärfördelningen. Detta förklarades genom att konstatera att då olika agenter har olika möjlighet att tjäna pengar kommer inte längre det mest sannolika makrotillståndet att vara det tillstånd med den högsta multipliciteten. Precis som i fallet för skatteundersökningen beror detta på att de olika mikrotillståndens tillgänglighet påverkas.

System av partiklar strävar efter ett tillstånd som maximerar entropin. Våra resultat implicerar att även pengar i ett samhälle strävar efter att sprida sig så att entropin maximeras. Ändras reglerna för pengautbytet på så sätt att vissa tillstånd blir mer eller mindre tillgängliga, eller på så sätt att olika personer har olika utbytesregler, kommer systemet inte nödvändigtvis följa Boltzmannfördelningen. Systemet kommer dock fortfarande att sträva mot att maximera entropin. Vidare kan det konstateras att de använda metoderna för arbetet gav framgångsrika resultat; det visade sig användbart att applicera metoder från statistisk fysik på ekonomiska system. Det är dock värt att nämna att det kan finnas alternativa tolkningar och modeller som förklarar systemen bättre.

## 8.1 Diskussion av framtagna modeller

Metoder från fysik kan inte hur som helst appliceras på ekonomi, och under arbetets gång har det ibland hänt att vi behövt förkasta hypoteser då de visat sig vara felaktiga. I tidiga stadier av detta arbete undersöktes till exempel huruvida värmeledningsförmåga kunde användas för att modellera handel mellan länder. Enligt vår hypotes borde pengar strömma från de länder med hög pengatemperatur till de länder med låg, men efter två veckors litteraturstudier hade vi endast funnit resultat som direkt motsäger detta. I den färdiga rapporten har vi strävat efter att endast diskutera paralleller mellan fysik och ekonomi som har kunnat verifieras. De modeller som framgångsrikt tagits fram inom econophysics är exempel på fall där en egenskap hos den ekonomiska datan tydligt kan relateras till fysikaliska fenomen.

I denna undersökning har det varit nödvändigt att göra vissa antaganden som visat sig rimliga vid jämförelse mot ekonomisk data, men som är svåra att motivera rent teoretiskt. Ett grundläggande påstående i kapitel 4 är att alla köp av varor och tjänster i samhället sker helt slumpmässigt. Vad som i verkligheten leder till en transaktion beror dock på en mängd olika faktorer och beslut som fattas på individnivå. Då ett större system blir otroligt komplext med så många parametrar att ta hänsyn till var det nödvändigt att skapa en förenklad modell för hur transaktionerna sker. Här betraktas alla agenter som identiska, utan individuella mål eller strategier, och varje transaktion modelleras med en stokastisk process. Inom fysiken är det vanligt att på detta sätt söka efter en enkel men fungerande modell av komplexa system. Huruvida de approximationer som gjorts är rimliga på mikronivå kan diskuteras, men storskaligheten hos de system som betraktas anses stödja antagandet om slumpmässiga transaktioner [27]. Resultat som erhålls senare i avsnittet visar att systemet framgångsrikt kan approximeras på detta sätt.

Om varje partikel ses som en aktör och man låter kinetisk energi motsvaras av ekonomiska tillgångar kommer energifördelningen över partiklar i en gas vara analog med förmögenhetsfördelningen över en befolkning. Det är den totala mängden energi, eller pengar, som är intressant. Trots detta används i denna rapport statistik över inkomster och inte förmögenheter vid majoriteten av de dataanpassningar som utförs. En jämförelse med förmögenhetsfördelningen i samhället skulle ge större trovärdighet, men användbar

sådan data finns generellt inte offentligt tillgänglig. Genom hela arbetet har vi därmed fått anta att en inkomstfördelning ger en bra representation av hur pengarna är fördelade i samhället. Trots att denna approximation inte kan bekräftas antas den vara rimlig [13]. Om det visar sig att inkomstfördelning och rikedomsfördelning inte korrelerar väl kan resultaten från denna undersökning ogiltigförklaras.

## 8.2 Förslag på vidare studier

I denna rapport jämförs två länder, Sverige och USA, med de framtagna modellerna. I båda fallen har modellerna visat sig representera verkligheten väl. Detta kan bero på att de båda länderna i grunden är kapitalistiska, även om de har olika skattenivåer. Ett, till exempel, kommunistiskt land kan dock visa sig avvika markant från de modeller som konstruerats och en sådan undersökning är därför intressant. Kanske är modellen bara representativ för en kapitalistisk ekonomi? Om så är fallet, vad avgör huruvida modellen är användbar?

Man kan fråga sig vad som egentligen orsakar specifika beteenden hos en ekonomi. Ett sätt att undersöka detta är att jämföra inkomstfördelningar från år till år och se vilka viktiga politiska händelser som kan kopplas till fluktuationer i fördelningen. Genom att studera förändringar över lång tid kan man eventuellt dra ytterligare slutsatser kring vilka krafter som påverkar inkomstfördelningen. Dessa slutsatser skulle då vara baserade på verklig statistik snarare än på simuleringar, till skillnad från resultaten av detta arbete.

Vidare vore det intressant att fortsätta på de spår som påbörjats i detta arbete. Man skulle då kunna prova att modifiera den agentbaserade modellens utbytesregler ytterligare, i syfte att försöka ringa in orsaken till de uppkomna distributionerna ytterligare. På grund av de uppsatta tidsramarna har här endast ansatser kunnat göras. Optimalt vore att slutligen sammanfoga de olika modellerna till en enda större modell, förslagsvis genom införandet av en allmängiltig, generaliserad "entropi". En sådan modell och entropi är dock svår att få till. Detta ses tydligt genom antalet mindre lyckade försök beskrivna i litteraturen.

Ett förhållandevis enkelt sätt att förbättra resultaten från detta arbete hade varit bättre tillgång till data. Idealt borde man använda ren rådata för inkomster istället för behandlad och sammanställd statistik som i denna studie. Man hade då kunnat dela upp sina intervall på det sätt man själv önskat och på så sätt förbättrat upplösningen på de framräknade inkomstfördelningarna. Tillgången på data har genomgående varit en mycket begränsande faktor, särskilt i de fall då svensk inkomststatistik söktes.

## 8.3 Slutsats

Sammanfattningsvis kan slutsatsen dras att metoder hämtade från statistisk fysik framgångsrikt kan användas för att undersöka även monetära distributioner. Det är dock viktigt att poängtera att man generellt sett bör vara försiktig då man drar paralleller mellan ekonomi och fysik. Just statistisk fysik lämpar sig väl, detta på grund av de aktuella systemens storlek. Särskilt entropibegreppet har visat sig kunna ge en bra förklaring till varför de undersökta välståndsfördelningarna ser ut som de gör.

## Referenser

- [1] Nationalencyklopedin, *Vilfredo pareto*, <http://www.ne.se/uppslagsverk/encyklopedi/l%C3%A5ng/vilfredo-pareto> (hämtad 2017-05-09).
- [2] M. Gallegati, S. Keen, T. Lux och P. Ormerod, "Worrying trends in econophysics", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **370**, 1–6 (2006).
- [3] A.C. Silva, V.M. Yakovenko, "Temporal evolution of the "thermal" and "superthermal" income classes in the USA during 1983–2001", *Europhysics Letter* **69**, 304–310 (2005).
- [4] A. Chatterjee, S. Sinha, B.K. Chakrabarti, "Economic inequality: is it natural?", arXiv:1204.6483v1 (opublicerad).
- [5] D.V. Schroeder, *An introduction to thermal physics*, 1st edition (Pearson Education Limited, Harlow, 2014), s. 50–51, 59, 74–77, 234–236, 374–376.
- [6] Census, *Table: marital status-people 18 years old and over, by total money income, work experience, age, race, hispanic origin, and sex*. <https://www.census.gov/data/tables/time-series/demo/income-poverty/cps-pinc/pinc-02.2013.html> (hämtad 2017-03-30).
- [7] V.M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money, debt, and energy consumption", *Science and Culture* **76**, arXiv:1008.2179, 430–436 (2010).
- [8] Yougui Wang, Ning Xi, Ning Ding, "How Required Reserve Ratio Affects Distribution and Velocity of Money", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications* **357**, arXiv:physics/0507160, 543–555 (2005).
- [9] SCB, *Förmögenhetsstatistik för personer efter region, kön, tillgångar/skulder. 2007*, [http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START\\_\\_HE\\_\\_HE0104/Tillg0versiktReg/table/tableViewLayout1/?rxid=7204accf-bb93-4604-8bd2-250e31ca58b2#](http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START__HE__HE0104/Tillg0versiktReg/table/tableViewLayout1/?rxid=7204accf-bb93-4604-8bd2-250e31ca58b2#) (hämtad 2017-04-20).
- [10] Michael McLeay, Amar Radia and Ryland Thomas, *Money creation in the modern economy*, <http://www.bankofengland.co.uk/publications/Documents/quarterlybulletin/2014/qb14q1prereleasemoneycreation.pdf> (hämtad 2017-03-19).
- [11] Riksbanken, *Den nya bankregleringen basel iii*, <http://www.riksbank.se/sv/Finansiell-stabilitet/Finansiella-regelverk/Aktuella-regleringsforandringar/Den-nya-bankregleringen-Basel-III/> (hämtad 2017-04-30).
- [12] Kari Lotsberg, *Riksbanken reducerar kassakraven för bankerna till noll*, [http://www.riksbank.se/Upload/Dokument\\_riksbank/Kat\\_publicerat/PoV\\_sve/sv/94\\_2\\_lotsberg.pdf](http://www.riksbank.se/Upload/Dokument_riksbank/Kat_publicerat/PoV_sve/sv/94_2_lotsberg.pdf) (hämtad 2017-04-30).
- [13] V.M. Yakovenko, "Applications of statistical mechanics to economics: entropic origin of the probability distributions of money, income, and energy consumption", arXiv:1204.6483v1 (opublicerad).
- [14] Federal Reserve, *Reserve requirements*, <https://www.federalreserve.gov/monetarypolicy/reservereq.htm> (hämtad 2017-05-07).
- [15] P. Auger, "On self-organization processes in microcanonical ensembles with non-equiprobable states", *International Journal of Systems Science* **15**, 877–884 (1984).
- [16] W. M. World, *Gini coefficient*, <http://mathworld.wolfram.com/GiniCoefficient.html> (hämtad 2017-04-07).
- [17] A. Chakraborti et al., "Econophysics review: II. Agent-based models", *Quantitative Finance* **11**, 1013–1041 (2011).

- [18] Statistiska Centralbyrån, *Tabell: sammanräknad förvärvsinkomst för boende i Sverige den 31/12 resp år (antal personer, medel- och medianinkomst samt totalsumma) efter region, kön, ålder och inkomstklass. år 1991 - 2015*, [http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START\\_\\_HE\\_\\_HE0110\\_\\_HE0110A/SamForvInk2/?rxid=d185fdeb-9608-4691-b2ba-d28610a9cb51#](http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START__HE__HE0110__HE0110A/SamForvInk2/?rxid=d185fdeb-9608-4691-b2ba-d28610a9cb51#) (hämtad 2017-03-30).
- [19] Census, *Table: selected characteristics of households by total money income*. <https://www.census.gov/data/tables/time-series/demo/income-poverty/cps-hinc/hinc-01.html> (hämtad 2017-04-04).
- [20] Statistiska Centralbyrån, *Gini-koefficient 1991-2005*, <http://www.scb.se/hitta-statistik/statistik-efter-amne/hushallens-ekonomi/inkomster-och-inkomstfordelning/inkomster-och-skatter/pong/tabell-och-diagram/inkomster--ekonomisk-standard-riket/gini-koefficient-1991-2015/> (hämtad 2017-05-01).
- [21] Statista, *U.s. household income distribution from 1990 to 2015 (by gini-coefficient)*, <https://www.statista.com/statistics/219643/gini-coefficient-for-us-individuals-families-and-households/> (hämtad 2017-05-01).
- [22] Fabio Clementi, Fabio Clementi, *Pareto's law of income distribution: evidence for germany, the united kingdom, and the united states*, *hej (hej, hej, 999)*, *hej*.
- [23] Arnab Chatterjee, Bikas K. Chakrabarti, and S.S. Manna, "Money in Gas-Like Markets: Gibbs and Pareto Laws", *Physica Scripta* **T106**, 36–38 (2003).
- [24] Statistiska Centralbyrån, *Tabell: sammanräknad förvärvsinkomst för boende i Sverige den 31/12 resp år (antal personer, medel- och medianinkomst samt totalsumma) efter region, kön, ålder och inkomstklass. år 1991 - 2015*, [http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START\\_\\_HE\\_\\_HE0110\\_\\_HE0110A/SamForvInk2/?rxid=d185fdeb-9608-4691-b2ba-d28610a9cb51#](http://www.statistikdatabasen.scb.se/pxweb/sv/ssd/START__HE__HE0110__HE0110A/SamForvInk2/?rxid=d185fdeb-9608-4691-b2ba-d28610a9cb51#) (hämtad 2017-03-30).
- [25] V.M. Yakovenko, "Two-class Structure of Income Distribution in the USA: Exponential Bulk and Power-law Tail", 15–23 (2005).
- [26] V. M. Yakovenko, "Statistical mechanics of money, income, debt, and energy consumption", *European Physical Journal B* **17**, 723 (2000).
- [27] V.M. Yakovenko, "Monetary economics from econophysics perspective", *Eur. Phys. J. Special Topics* **225**, 3313–3335 (2016).

## A Härledning av uttryck för multipliciteten

Följande ekvation beskriver multipliciteten  $\Omega$  för en given uppsättning  $N_0, N_1, \dots, N_M$  i relation till det totala antalet agenter  $N$ :

$$\Omega = \frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_M!} .$$

$\Omega$  beskriver på hur många sätt den givna uppsättningen  $N_0, N_1, \dots, N_M$  kan väljas ur  $N$  element. Den första faktorn,  $\binom{N}{N_0}$ , anger antalet kombinationer då  $N_0$  element väljs av  $N$ . Sedan väljs  $N_1$  element av de  $N - N_0$  kvarvarande elementen:  $\binom{N - N_0}{N_1}$ . Upprepas detta för varje  $N_m$  från 0 till  $M$  fås följande uttryck:

$$\binom{N}{N_0} \binom{N - N_0}{N_1} \binom{N - N_0 - N_1}{N_2} \dots \binom{N - N_0 - \dots - N_{M-2}}{N_{M-1}} \binom{N - N_0 - \dots - N_{M-1}}{N_M} .$$

Binomialkoefficienternas utseende gör att detta kan utvecklas enligt:

$$\frac{N!}{N_0! (N - N_0)!} \dots \frac{(N - N_0 - \dots - N_{M-2} - N_{M-1})!}{N_M! (N - N_0 - \dots - N_{M-1} - N_M)!} = \frac{N!}{N_0! N_1! \dots N_M!} .$$

Täljaren och delar av nämnaren i två intilliggande faktorer kommer visa sig kancellera varandra. Kvar blir den första faktorns täljare,  $N!$ , varje faktors nämnare,  $N_0!, N_1!, \dots, N_M!$ , och den sista faktorn delnämnamare,  $(N - N_0 - \dots - N_{M-1} - N_M)!$ . Då  $\sum_{m=0}^M N_m \equiv N$  kommer talet inuti denna fakultet bli noll, och eftersom  $0! = 1$  kan faktorn strykas.



## B Maximering av lagrangianen

Här maximeras lagrangianen  $L$  genom  $\frac{\partial L}{\partial N_m} = 0 \quad \forall N_m$ . Notera att lagrangianen är en strikt växande funktion, vilket innebär att den extrempunkt som erhålls måste vara ett maxima.

$$L = N \ln N - \sum_{m=0}^M N_m \ln N_m + \sum_{m=0}^M N_m(\alpha - \beta m) . \quad (33)$$

Notera att även den första termen,  $N \ln N$  måste deriveras, då:

$$N \ln N = \sum_{m=0}^M N_m \ln \left( \sum_{m=0}^M N_m \right)$$

$$\Rightarrow N \ln N = \dots + N_m \ln(\dots + N_m + \dots) + N_{m+1} \ln(\dots + N_m + \dots) + \dots .$$

Utförs denna derivering blir resultatet därmed:

$$\frac{\partial}{\partial N_m}(N \ln N) = \dots + \frac{N_{m-1}}{N} + \ln N + \frac{N_m}{N} + \dots = \ln N + 1 . \quad (34)$$

Derivering av den andra termen i (33) ger:

$$\frac{\partial}{\partial N_m} \left( - \sum_{m=0}^M N_m \ln N_m \right) = - \frac{\partial}{\partial N_m} (\dots + N_m \ln N_m + \dots) = - \ln N_m - 1 . \quad (35)$$

Slutligen deriveras den sista termen:

$$\frac{\partial}{\partial N_m} \left( \sum_{m=0}^M N_m(\alpha - \beta m) \right) = \frac{\partial}{\partial N_m} (\dots + N_m(\alpha - \beta m) + \dots) = \alpha - \beta m . \quad (36)$$

Nu kombineras (34), (35) och (36) under maximeringsvillkoret  $\frac{\partial L}{\partial N_m} = 0$ :

$$\begin{aligned} \ln N + 1 - \ln N_m - 1 + \alpha - \beta m &= 0 \\ \Rightarrow \ln \frac{N_m}{N} = \alpha - \beta m &\Rightarrow \frac{N_m}{N} = e^{\alpha - \beta m} . \end{aligned}$$