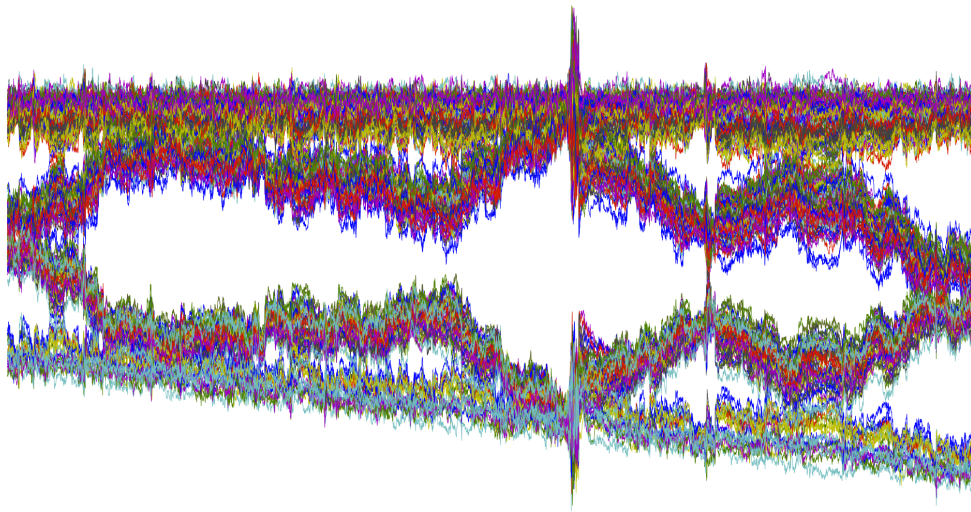




CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



Finansiella marknader som komplexa system

– Uppkomsten av empiriska fenomen i en agentbaserad modell av aktiehandeln

Kandidatarbete inom Teknisk fysik

Linnea Andersson
Sebastian Bertolino
Jakob Lindqvist
Per Nilsson Lundberg
Samuel Rubenson

Institutionen för teknisk fysik
CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Göteborg, Sverige 2015

Sammandrag

Rapporten behandlar en agentbaserad modell av en aktiemarknad. Syftet är att skapa en modell som uppvisar kvalitativa egenskaper som observeras på riktiga marknader men som konventionella teorier inte omfattar. Modellen utgår från en minoritetsspel (MG), och modifieras för att ge en realistisk finanstolkning. Slutresultatet är ett storkanoniskt minoritetsspel (GCMG). Agenterna, som varken är helt rationella eller perfekt informerade, ger i modellen upphov till en komplex växelverkan vars effekter kopplas till empiriskt observerade fenomen. Tidigare resultat bekräftas och en ny förklaringsmodell till dynamiken bakom agenternas gruppering på marknaden ges. Grupperingen visas bero av agenternas reaktion på isolerade extremhändelser. Detta resultat utnyttjas för att skapa en modell med kraftigt varierande aktivitet, något som kan kopplas till bubblor och börskrascher på en aktiemarknad.

Nyckelord: *Komplexa system, Agentbaserad modellering, Minoritetsspel, Ekofysik, BMG, GCMG*

Abstract

The purpose of this paper is to determine whether an agent-based approach can be a viable alternative to conventional market models. The model is created as a Minority Game (MG), then modified to serve as a more realistic market model. The result is a Grand Canonical Minority Game (GCMG). The modelled agents, who are neither perfectly rational nor well-informed, give rise to complex interactions creating phenomena similar to stylized facts found in financial markets. Previous results for the GCMG are confirmed and a novel explanation for the tendency of agents to form groups is presented. The point process of the agents is shown to be largely dependent on their reaction to isolated extreme events. This result is used to produce a model with strongly varying market activity, a behaviour related to bubbles and crashes in a stock market.

Keywords: *Complex Systems, Agent-based Modelling, Minority Game, Econophysics, BMG, GCMG*

Innehåll

1	Inledning	1
1.1	Agentbaserad modellering: Makro från mikro	2
1.2	Disposition	2
2	Syfte	3
3	Metod	3
4	Basic Minority Game, <i>BMG</i>	3
4.1	El Farol Bar-problemet	3
4.2	Modellen	4
4.3	Finansiell tillämpning	11
4.4	Brister som marknadsmodell	14
5	Grand Canonical Minority Game, <i>GCMG</i>	16
5.1	Modellen	16
5.2	Aktivitet	17
5.3	ε -övergång	20
5.4	Volatilitet: α_c för <i>GCMG</i>	22
5.5	Aktiva spekulanter	23
5.6	Förutsägbarhet	23
5.7	Varierande volym	25
5.8	Strategiernas gruppering	27
5.8.1	Strategiernas inbördes avstånd	28
5.8.2	Spekulanters förhållande till producenternas samlade inverkan	29
5.8.2.1	Fallet $\Pi^\xi = 1$	33
5.8.2.2	Fallet $\Pi^\xi = 2$	33
5.8.2.3	Fallet $\Pi^\xi > 2$	34
5.8.2.4	Anmärkning	34
6	Finansiell tillämpning av <i>GCMG</i>	37
6.1	Fördelning av R^{\log}	39
6.1.1	Alternativ fördelning	39
6.2	Autokorrelation	41
7	Diskussion/Slutsats	44
7.1	Resultatens innebörd och relevans	44
7.2	Fortsatta utvecklingsmöjligheter	46
	Referenser	47
A	Utvärderingsmetoder	49
A.1	Quantile-Quantile Plot	49
A.2	Autokorrelation	49

1 Inledning

Så länge det har funnits ekonomiska system har det funnits en drivkraft att förstå marknadens bakomliggande mekanismer men det är först de senaste 50 åren som de tekniska verktygen har funnits till hands för analys av stora mängder finansiell data. Redan i slutet av 1800-talet sparades ekonomisk data från aktiemarknader men det var först på 1970-talet som man med datorers hjälp systematiskt kunde lagra tillräckligt mycket data för storskalig analys. Idag sparas enorma mängder data på världens börser, inte bara sparas varje enskild transaktion utan även de köp- och säljorder som inte resulterar i en affär. Samtidigt har utvecklingen inom informationsteknik lett till en explosionsartad ökning av aktiemarknadens omfattning och komplexitet, genom till exempel robothandel, nya typer av värdepapper och en globalisering av alla marknader.

Teorierna som ämnar beskriva finansmarknader kan delas upp i ekonomiska och matematiska teorier där de ekonomiska beskriver mer konceptuella egenskaper medan matematiska teorier framförallt försöker ge kvantitativa förutsägelser för enskilda tillgångar. Den ekonomiska teori som har varit tongivande under 1900-talet är den neoklassiska nationalekonomin som bygger på antagandet om välinformerade aktörer som alltid tar fullt rationella beslut. De premisserna ger en marknad som befinner sig i jämvikt och rubbas endast tillfälligt av yttre störningar [1].

Parallellt med teknikens framsteg på 1970-talet publicerade Black och Scholes sina teorier för hur man matematiskt kunde beskriva prisutvecklingen av olika tillgångar, kanske framförallt riktat mot aktier [2] [3]. Med denna definition av prisprocessen blev det även möjligt att ta fram ett slutet uttryck för priset av en option med den givna aktien som underliggande tillgång. Mycket på grund av sin enkelhet blev dessa teorier brett använda, dock har senare analyser av olika tillgångars prisutveckling visat på brister i B&S teori. Ett grundläggande antagande i modellen är att prisprocessen drivs av en brownsk rörelse [4]. Det får innebörden att inkrement i processen av logaritmerade priser ska vara normalfördelade.

De senaste årens finanskriser har visat på bristerna i den neoklassiska teorin just på grund av dess oförmåga att förklara bubblor och börskrascher. Välinformerade och helt rationella aktörer kan per konstruktion inte bidra till den övervärdering av en tillgång som leder till en bubbla. Även B&S modell brister då analyser av empirisk data motsäger antagandet om prisändringars fördelning och pekar mot att denna process snarare följer en fördelning som är mer kompakt runt sitt medelvärde och uppvisar tyngre svansar än en normalfördelning, så kallade *Fat Tailed Distributions* eller tjocksvansade fördelningar [5]. Dessa tjocka svansar är en av tre vanliga så kallade *Stylized Facts*, här kvalitativa egenskaper som aktiemarknader generellt uppvisar men som konventionella teorier inte omfattar. De andra två rör *avkastningen* $R(t)$ som dels ska ha autokorrelation noll och dels ska dess belopp

$|R(t)|$ ha en autokorrelation som är positiv och avtagande [6]. Det senare fenomenet kallas *volatilitetshopning* och förklarades av matematikern Benoit Mandelbrot som att: ”Stora förändringar tenderar följas av stora förändringar, oavsett tecken, och små förändringar tenderar följas av små förändringar” [7].

I jakten på en alternativ, mer realistisk, beskrivning av finansiella marknader har den tvärvetenskapliga grenen *ekonofysik* fått en del uppmärksamhet de senaste åren [8]. Bland annat finns förhoppningen att med *agentbaserad modellering* beskriva finansmarknader som komplexa system och få en modell som kan visas innehålla de kvalitativa egenskaperna beskrivna ovan. Utgångspunkten för denna rapport är just att undersöka detta.

1.1 Agentbaserad modellering: Makro från mikro

Att komplexa system kan beskrivas till fullo av sina minsta beståndsdelar är tilltalande. Genom att reducera komplicerade förlopp till interaktioner mellan beståndsdelar, *agenter*, som ges enkla egenskaper kan hela systemet modelleras medelst simulering. Fundamentalt för den agentbaserade modelleringen är att makroskopiska storheter, som till exempel ett pris, kan simuleras fram från mikroskopiska egenskaper hos systemet.

Fördelarna är många jämfört med den klassiska makroskopiska modellen; agenterna har individuellt mycket enkla egenskaper men systemet beskrivet av agenternas växelverkan kan vara mycket komplext. Komplexiteten begränsas alltså inte av analytiska metoder utan snarare av datorkraft. I agenternas enkelhet finns dessutom en möjlighet att identifiera vilka basala parametrar som faktiskt styr systemets dynamik.

Med agentbaserad modellering begränsas inte heller marknaden till att följa en viss fördelning och har en principiell skillnad gentemot övriga ekonomiska teorier i det att agenterna varken är helt rationella eller perfekt informerade. De tar sina beslut baserade på en uppsättning strategier utifrån en begränsad tillgång till historik. Frågan är om växelverkan mellan dessa strategier kan skapa flockbeteenden, ett exempel på fenomen som uppkommer på riktiga marknader.

En viktig poäng är att den här rapporten modellerar agenter som utgör ett slutet system där utfallet av varje enskild agents beslut bestäms av alla agents kollektiva beslut, helt isolerat från yttre faktorer. De makroskopiska egenskaper som eventuellt observeras sker alltså utan att systemet störs utifrån.

1.2 Disposition

I avsnitt 2 och 3 formuleras syfte och metoden med vilket arbetet har genomförts. Därefter avviker rapporten något från en konventionell struktur genom att blanda teori och resultat i beskrivningarna av de två huvudmodellerna i avsnitt 4 och 5.

Detta på grund av den itererande metodiken där nya resultat har gett ny teori och vice versa. I avsnitt 6 återkopplar vi resultaten i modellerna till en finansmarknad och försöker påvisa de kvalitativa egenskaperna som presenterades i inledningen. Resultatets trovärdighet och tolkningen av dem diskuteras i sista avsnittet 7, där finns också idéer om vad som skulle kunna ta modellen vidare i framtiden.

2 Syfte

Syftet är att undersöka om agentbaserade modeller kan vara ett gångbart alternativ till konventionella ekonomiska och matematiska modeller för att beskriva finansmarknader. Därför kommer modellens uppbyggnad och resultat kopplas till en handelsmarknads byggstenar och aktörer. Förhoppningen är att genom modellering från ett mikroperspektiv kunna visa på makroeffekter som stämmer överens med kvalitativa egenskaper hos empirisk data.

3 Metod

Arbetet inleddes med teorigångstudier för att få en förståelse för konceptet agentbaserad modellering och för den ekonomiska bakgrund till vilken projektets resultat ska återkoppla. Därefter har en egen modell konstruerats, först konceptuellt och sedan implementerad i kod. Modellen är skriven i Matlab på grund av dels goda möjligheter att visa resultat grafiskt och dels modellens matrisrepresentation som lämpar sig väl för implementering i Matlab.

Huvuddelen i arbetet har varit att skapa modellen, simulera och analysera dess resultat. Processen har varit organisk i den bemärkelsen att simulerade resultat har motiverat förändringar i modellen vilket i sin tur lett till nya resultat. Kodens utveckling drevs antingen av att ändra den till att bättre uppfylla syftet eller att helt enkelt förbättra dess tidskomplexitet.

För att undersöka om vår modell uppvisar önskvärda egenskaper har vi jämfört dess resultat med empirisk finansiell data.

4 Basic Minority Game, *BMG*

4.1 El Farol Bar-problemet

1994 formulerade W. Brian Arthur *El Farol Bar-problemet* som lämpar sig väl för att beskrivas med agentbaserad modellering [9]. Detta används som inspiration till den första modellen i denna rapport och är formulerat på följande sätt:

I en småstad i New Mexico är alla invånare intresserade av att gå till den lokala baren, El Farol Bar, som namngivit problemet. Baren är liten och besökarna tycker inte det är kul och gå dit om där är för mycket folk. Det är roligare på baren än att stanna hemma om färre än 60% av stadens invånare går dit. Om det är fler än 60% av stadens invånare på baren är det mer uppskattat att stanna hemma. Invånarna måste varje kväll ta beslutet om de ska gå till baren eller stanna hemma, utan att kommunicera med varandra. Invånarna baserar sina strategier på de beslut som varit gynnsamma ett bestämt antal kvällar tillbaka. Invånarnas beslut verkställs, det fördelaktiga beslutet adderas till historiken och en ny omgång av spelet börjar.

Det intressanta med problemet är att inte finns någon globalt optimal strategi för problemet. Om det skulle finnas en sådan skulle alla välja den. Antingen skulle alla gå till baren och bli missnöjda eller skulle alla stanna hemma och ingen skulle bli nöjd och strategin skulle inte längre vara den gynnsamma. Avsaknaden av ett jämviktsläge där alla invånare är nöjda ger upphov till en komplex dynamik trots spelets enkla regler.

4.2 Modellen

Med inspiration från El Farol Bar-problemet tas ett första steg mot en marknadsmodellering genom att skapa och undersöka ett grundläggande minoritets-spel, *Basic Minority Game (BMG)*. I BMG modelleras invånarna som agenter och till skillnad från i El Farol strävar agenterna istället efter att hamna i minoritet. Modellen beskrevs i två artiklar av D. Challet och Y.C. Zhang där agenternas strategier också formaliserades [10] [11].

Modellen innehåller N agenter, där N väljs udda så att det alltid finns en *minoritetsgrupp*. Var och en av agenterna initieras med s strategier som hålls statiska under spelet. En strategi består av ett val till varje potentiell situation. Precis som i El Farol Bar-problemet baseras dessa situationer på ett *minne* av vad som varit det gynnsamma valet m tidssteg bakåt. Med ett binärt minne av längd m så finns det i varje tidssteg $P = 2^m$ möjliga situationer, hädanefter benämnda *historier*. Då en strategi har ett binärt val till varje historia finns det 2^P olika strategier som kan tilldelas agenterna, se tabell 1.

Tabell 1: Exempel på en strategi. För $m = 2$ finns $P = 2^m = 4$ stycken historier och en strategi har ett föreskrivet beslut till varje möjlig historia.

<i>Historia</i>	<i>Val</i>
00	0
01	1
10	0
11	1

Valet föreskrivet av strategi s för agent i vid tidssteget t betäcks $a_i^s(t)$. I varje tidssteg använder en agent den av sina s strategier som varit bäst historiskt. Därför tilldelas alla gynnsamma strategier poäng i varje tidssteg oavsett om de användes av en agent eller ej.

Modellens enkelhet gör att spelet kan tolkas på flera olika sätt, men med fortsatt koppling till El Farol Bar-problemet där valen är att gå till baren eller att stanna hemma, så blir det önskvärda utfallet att hålla minoritetsgruppen så stor som möjligt i varje tidssteg. Då är spelet så effektivt som möjligt sett till hur agenterna utnyttjar resurserna med avseende på att maximera antalet nöjda agenter. Spelet är dock konstruerat så att det alltid blir bortslösade resurser eftersom majoriteten förlorar i varje tidssteg.

Sett till hur spelet är uppbyggt såg vi det som rimligt att jämföra modellens resultat med ett hypotetiskt spel där agenterna i varje tidssteg väljer slumpmässigt mellan de två alternativen $\{0, 1\}$. Låt $a_i(t)$ vara agent i 's val vid tiden t , vi introducerar sedan

$$A(t) := \frac{N}{2} - \sum_{i=1}^N a_i(t), \quad (4.1)$$

där avvikelser från 0 är ett mått på bortslösade resurser vid tiden t . Med $a_i(t)$ som en oberoende, identiskt distribuerad slumpvariabel X_i som likformigt tar värden i $\{0, 1\}$ fås:

$$E[A(t)] = \frac{N}{2} - E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = \frac{N}{2} - \sum_{i=1}^N E[X_i] = \frac{N}{2} - \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} = \frac{N}{2} - \frac{N}{2} = 0, \quad (4.2)$$

vilket innebär att även i en slumpmässig modell är de förväntade bortslösade resurserna noll i varje tidssteg. Givet detta resultat blir det istället intressant att undersöka variansen av $A(t)$, som i den helt slumpmässiga modellen är:

$$\begin{aligned} \text{Var}[A(t)] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N X_i\right] = E\left[\left(\sum_{i=1}^N X_i\right)^2\right] - E\left[\sum_{i=1}^N X_i\right]^2 = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E[X_i X_j] - \frac{N^2}{4} = \sum_{i=1}^N E[X_i^2] + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N E[X_i] E[X_j] - \frac{N^2}{4} = \\ &= \frac{N}{2} + \frac{N^2 - N}{4} - \frac{N^2}{4} = \frac{N}{4}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

För att återvända till modellen beskriven ovan definierar vi historien vid tiden t ,

$$\mu(t) = \mu_k, \quad k \in \{1, \dots, P\} \quad (4.4)$$

som då är en funktion av minoritetsgruppen för m tidssteg bakåt. Vidare definieras minoritetsgruppen $\Theta(t)$ som

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{om } A(t) > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases} \quad (4.5)$$

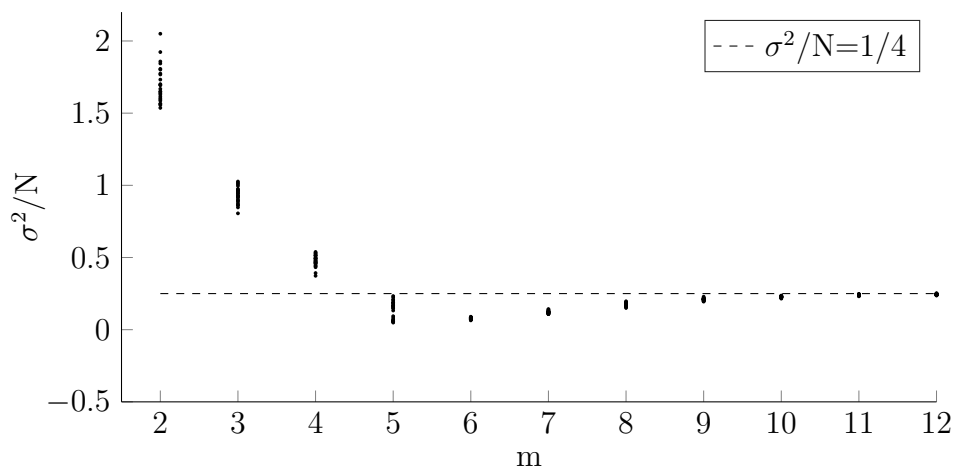
Poängen för en strategi uppdateras enligt:

$$P_i^s(t+1) = P_i^s(t) + \begin{cases} 1 & \text{om } a_i^s(\mu(t)) = \Theta(t) \\ -1 & \text{annars,} \end{cases} \quad (4.6)$$

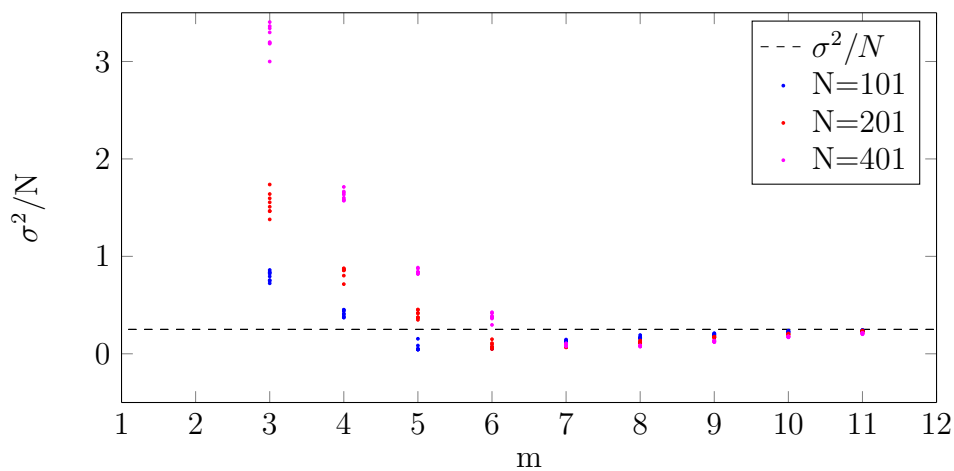
där $a_i^s(\mu(t))$ är valet föreskrivit vid historien $\mu(t)$ för agent i , av strategi s . Notera att en strategi får poäng även om den inte används av en agent. Den ovan beskrivna modellen användes för att simulera minoritetsspelet för en mängd parameteruppsättningar, och variansen av $A(t)$ uppskattades som variansen σ^2 av serien $\{A(t)\}_{t=0}^T$ för en viss simulering, där T är den totala längden på tidsserien. Det blev naturligt att använda $\frac{\sigma^2}{N}$ för att lätt kunna jämföra olika parameterintervall och dessutom kan den tolkas som *volatiliteten* för spelet, vilket är en viktig finansiell storhet. På grund av spelets uppbyggnad motsvarar därmed låg volatilitet i BMG ett spel med stora minoritetsgrupper och lite variation mellan tidssteg, alltså ett spel med väl fördelade resurser. Figur 4.1 visar hur volatiliteten beror av m då antalet agenter hålls konstant, vilket bekräftar tidigare resultat [12]. Resultatet är mycket intressant och visar följande: för låga m är σ^2/N stor och har hög spridning mellan körningar. Volatiliteten avtar sedan linjärt med ökning av m och når ett minimum väl under det teoretiska värdet för slumpmässiga val. Efter minimumet ökar volatiliteten och närmar sig den slumpmässiga volatiliteten asymptotiskt. Agenterna kan alltså utnyttja resurserna bättre än i det slumpmässiga fallet helt utan kontakt med varandra och utan fördefinierade uppgörelser.

Volatiliteten bestäms dock inte bara av m utan har ett mer komplext beroende [12]. Stora T gör den numeriska approximationen av σ^2/N bättre genom att ge fler datapunkter, trots det visar figur 4.1 att upprepade körningar med samma parametrar kan ge stor spridning på $\frac{\sigma^2}{N}$ för små m . Det innebär att fördelningen av strategier har en stor betydelse för hur spelet utvecklar sig. Figur 4.2 visar att samma beteende finns för olika N men minimumet förskjuts när antalet agenter varierar.

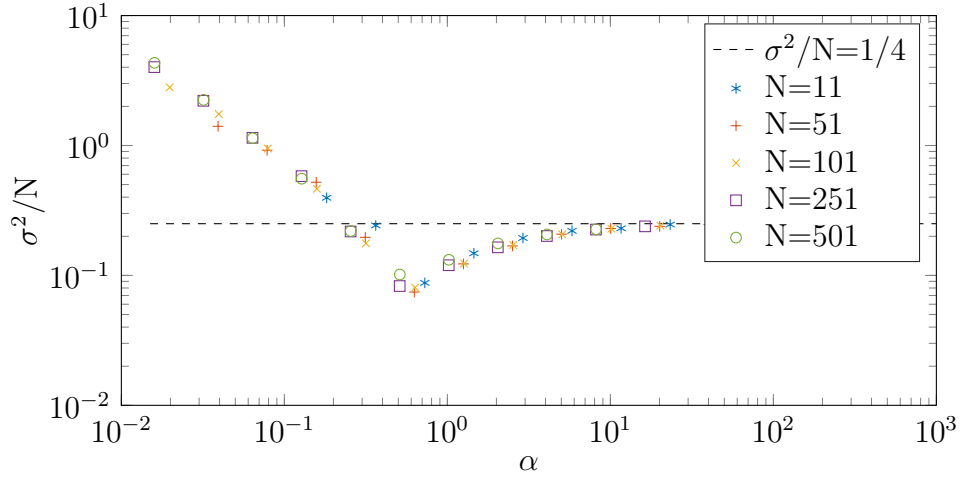
Vi tolkar detta som att fasövergången sker vid en optimal fördelning av strategierna. Vid $m = 2$ finns det $2^P = 16$ olika strategier, och då man ökar antalet agenter så delar flera agenter på samma strategi varpå agenterna tar beslut i grupp och stora fluktuationer på $A(t)$ uppstår. Samtidigt ger $m = 9$ fler än $1.3 \cdot 10^{154}$ olika strategier och det blir rimligt att anta att varje agent har en unik uppsättning strategier inom ett spel. Då kan inte grupper bildas på samma sätt och besluten



Figur 4.1: Volatiliteten σ^2/N för olika m skalad med antalet agenter. Varje punkt visar resultatet för en simuleringen med $N = 101$, $s = 2$, $T = 15000$ och varierande m . Notera hur variansen minskar linjärt till ett minimum lägre än den slumpmässiga volatiliteten för att sedan asymptotiskt åter närma sig för stora m .



Figur 4.2: σ^2/N som funktion av m för olika antal agenter. Varje punkt visar resultatet för en simuleringen med $T = 15000$. Här observeras att minimumet sker för olika värden på m beroende på antalet agenter.



Figur 4.3: Volatiliteten σ^2/N som en funktion av $\alpha = 2^m/N$, där både m och N varieras. Varje punkt är ett medelvärde av 10 simuleringar med samma parametrar: $T = 20000$, $s = 2$.

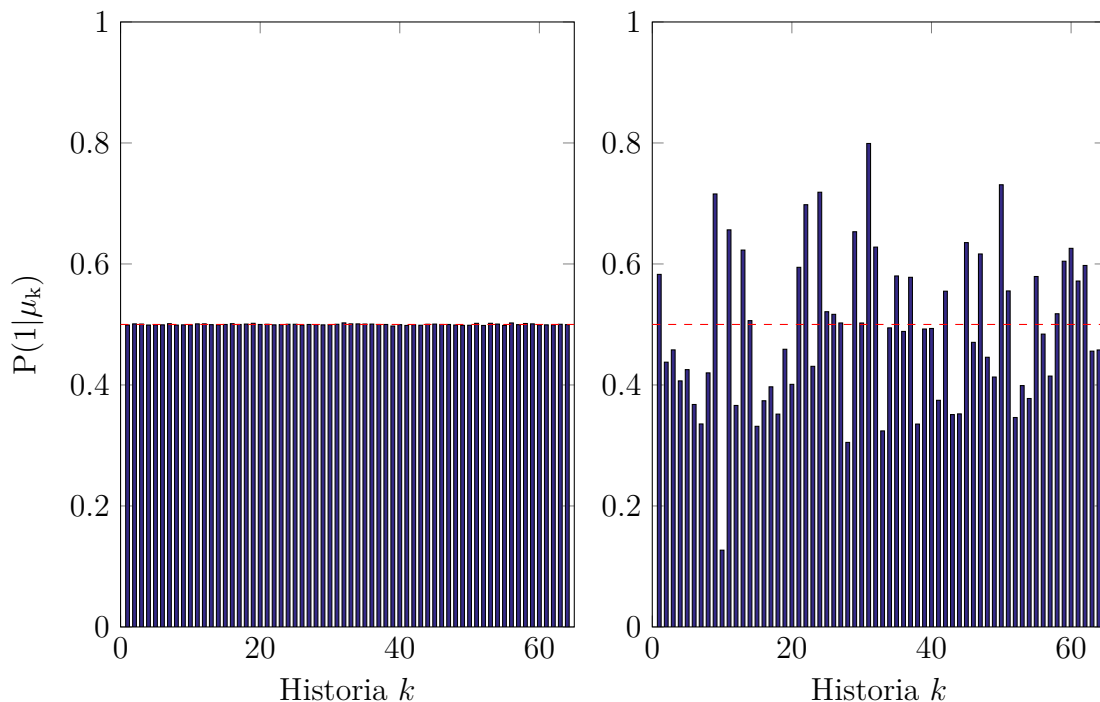
kommer te sig allt mer slumpmässiga. Det är dock värt att notera att även om varje strategi är unik inom ett spel så kan avståndet mellan dem variera. Ett exempel på två olika men närliggande strategier kan förespråka samma val för $2^m - 1$ olika historier och skilja på endast en. Inom ett spel så finns det 2^m historier för agenter att reagera på, och det har tidigare visats att antalet möjliga historier per agent är ett universellt mått på var fasövergången sker [11]. Vi definierar därför parametern

$$\alpha = \frac{2^m}{N}. \quad (4.7)$$

Figur 4.3 visar $\frac{\sigma^2}{N}$ som funktion av α som uppenbarligen är en "universell" parameter i hänseendet att för olika N och m är volatiliteten minimal för samma värde på $\alpha \approx 0.55$. Simuleringar visar även att antalet strategier per agent, s inte förändrar spelets dynamik utan bara förskjuter minimumet, detta bekräftas också av tidigare resultat [11]. Hädanefter begränsas analysen till $s = 2$.

Det finns alltså ett α där förhållandet mellan tillgänglig information och antalet agenter gör att spelet blir så effektivt som möjligt. Är kvoten liten så klumpar agenterna ihop sig och genererar små minoritetsgrupper medan en stor kvot gör att agenterna inte kan växelverka överhuvudtaget och spelet blir slumpmässigt. Att parametern är just $\alpha = 2^m/N$ görs troligt genom resonemanget ovan även om det inte entydigt bestämmer täljarens form.

Här väcks frågan om hur variansen av minoritetsgruppen kan bli avsevärt lägre än i det slumpmässiga fallet. Det enda rimliga svaret är att det uppkommer någon form av förutsägbarhet inom spelet; trots att agenterna agerar oberoende



Figur 4.4: Betingad sannolikhet för olika faser. För varje möjlig historia μ_k , $k \in \{1, \dots, P\}$ visas sannolikheten för $\Theta(t) = 1$ för två olika α . För $\alpha = 0.21$ (vänstra bilden) finns ingen förutsägbarhet medan för $\alpha = 0.70$ (högra bilden) är sannolikheten inte likformigt fördelad över historierna.

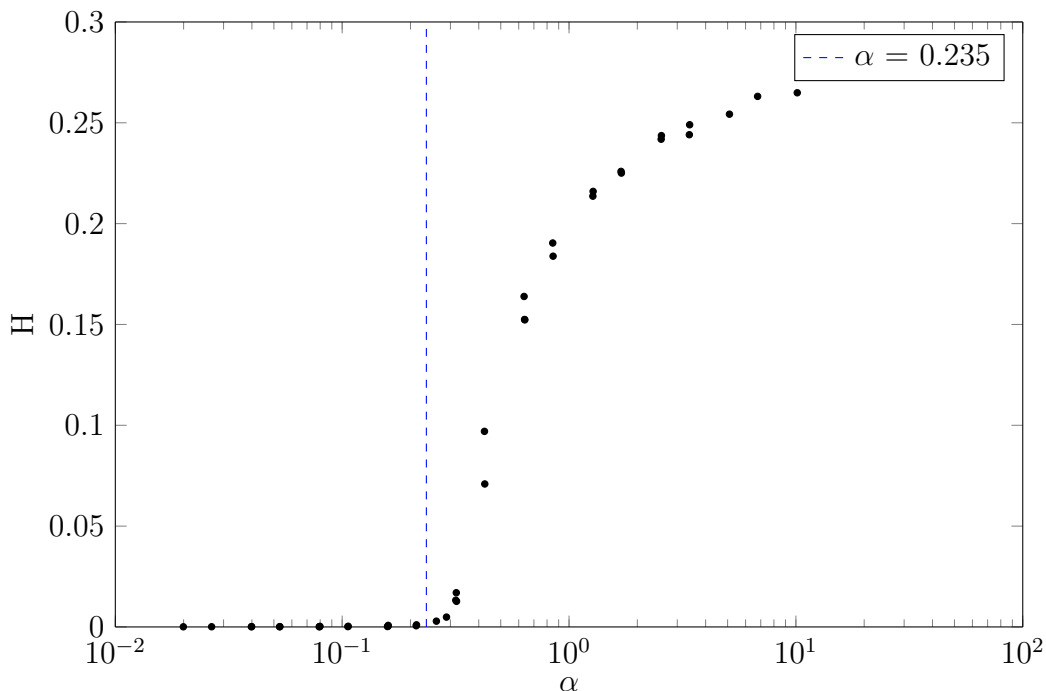
av varandra tycks det finnas kollektiv information tillgänglig i spelet som de kan utnyttja. Detta undersöktes genom att titta på den betingade sannolikheten för minoritetsgruppen i varje tidssteg, $P(\Theta(t) = 1|\mu_k)$, vilken kan uppskattas numeriskt genom att gå över alla t och få en relativ frekvens för $\Theta(t) = 1$ för varje enskild historia. Låt $S := \{t : \mu(t) = \mu_k\}$, då är

$$P(1|\mu_k) = \frac{\sum_{t \in S} \Theta(t)}{|S|}, \quad (4.8)$$

där $|S|$ är antalet element i S . Figur 4.4 visar den betingade sannolikheten för två olika α som är på var sin sida om minimumet i figur 4.3 och hur det i det senare fallet finns en icke uniform sannolikhetsfördelning.

Agenterna agerar oberoende av varandra men trots det finns det alltså kollektiv information tillgänglig i spelet som de kan utnyttja. För att kunna mäta informationen i spelet införs en storhet för *förutsägbarhet*, H :

$$H = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P |P(1|\mu_k) - \frac{1}{2}|, \quad (4.9)$$



Figur 4.5: H (se ekvation (4.9)) som funktion av α . Vi noterar att först för $\alpha \gtrsim 0.235$ är $H > 0$, och ökar sedan asymptotiskt med α . Varje punkt representerar ett medelvärde över 5 oberoende simuleringar med $T = 30000$.

vilket är ett numeriskt mått på avvikelserna av de betingade sannolikheterna från den slumpmässiga sannolikheten $P(1|\mu_k) = 1/2, \forall k$. Resultatet blir en skalär $H \in [0, 1/2]$ där $H = 0$ motsvarar ett helt oförutsägbart spel och $H = 1/2$ motsvarar ett helt förutsägbart spel där $P(1|\mu_k) \in \{0, 1\} \forall k$.

Figur 4.5 visar att det inte finns någon förutsägbarhet i spelet fram till ett kritiskt $\alpha = \alpha_c \approx 0.235$ varefter systemet genomgår en fasövergång och ökar kraftigt. Brytpunkten sker alltså inte vid minimumet för volatiliteten utan något tidigare. Uppkomsten av förutsägbarhet har observerats tidigare [12]. En jämförelse med figur 4.3 visar att $\alpha = 0.235$ är omkring det värde där variansen blir mindre än för det slumpmässiga spelet. Resultatet bekräftar hypotesen tidigare i stycket, där en varians lägre än den slumpmässiga måste sammanfalla med ett tillskott av information i spelet. Anmärkningsvärt är dock att H ökar monotont med α trots att variansen tidigare konstaterats närma sig den slumpmässiga för stora α . En möjlig förklaring till hur spelet kan te sig slumpmässigt trots en nollskild förutsägbarhet är att agenterna inte delar på några strategier och kan så inte utnyttja förutsägbarheten genom växelverkan.

Med stora ändringar i förutsägbarhet bör spelets dynamik också se olika ut för

olika värden på α . Vi definierar

$$P_i^{max}(t) := \max_s P_i^s(t), \quad (4.10)$$

för att kunna följa utvecklingen av varje agents bästa strategi. Detta för att visualisera spelets gång på ett bra sätt. I figur 4.6 visas hur α och därmed graden av förutsägbarhet påverkar dynamiken.

4.3 Finansiell tillämpning

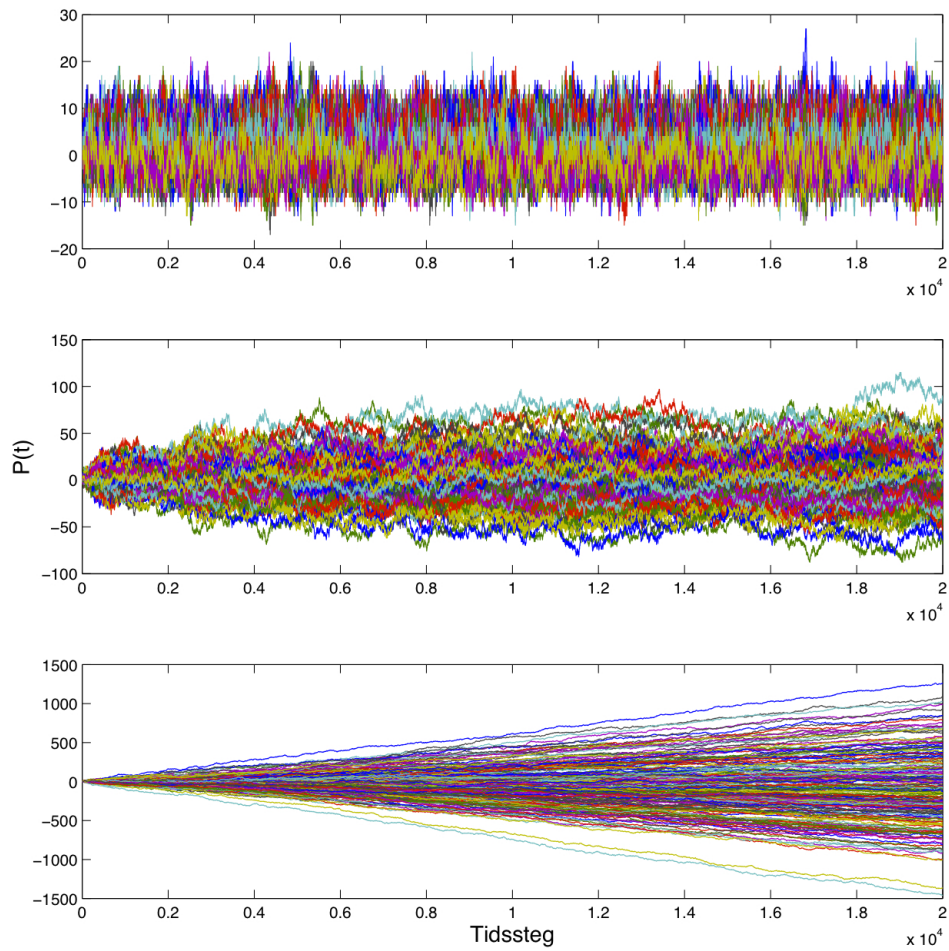
Målet är att koppla BMG till en finansmarknad. Genom att betrakta agenterna som köpare och säljare på en marknad där valet $a_i^s(t) \in \{0, 1\}$ motsvarar sälj respektive köp blir $A(t)$ (se ekvation (4.1)) ett mått på tillgång och efterfrågan. Med den kan ett pris $p(t)$

$$p(t+1) = p(t)e^{\frac{A(t)}{\lambda}} \quad (4.11)$$

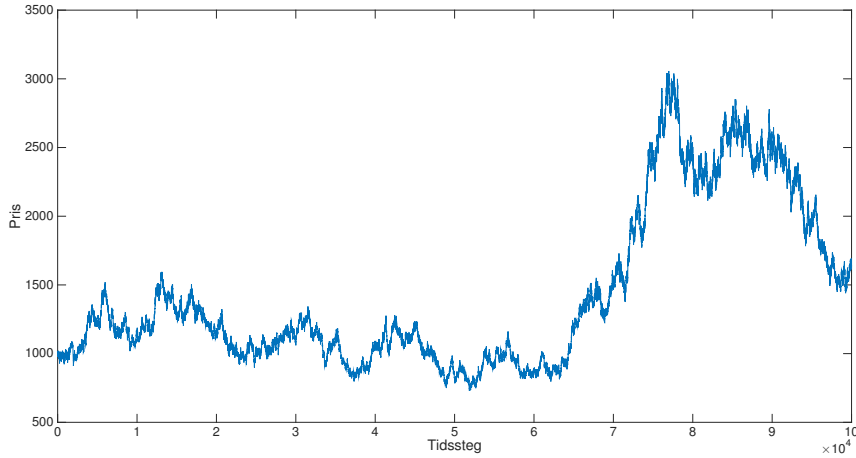
definieras i varje diskret tidssteg, där priset i nästa tidssteg beror av priset i tidssteget innan och en förändringsfaktor $e^{\frac{A(t)}{\lambda}}$. Prisprocessen är i modellen kraftigt förenklad då den inte tar hänsyn till huruvida efterfrågan kan mötas av en tillgång, vilket gör att alla transaktioner alltid är möjliga. Parametern λ införs för att kontrollera hur känsligt priset är för fluktuationer i $A(t)$. I finastermer motsvarar det marknadens *likviditet*, det vill säga hur mycket priset på en tillgång påverkas av transaktioner. Utan λ skulle priset kunna öka orimligt mycket i varje tidssteg då $A(t) \in \{-N/2, -N/2 + 1, \dots, N/2 - 1, N/2\}$ står i exponenten. I simuleringarna användes därför stora λ för att motverka att exponenten blir alltför stor. Notera att detta endast är en dämpning av $A(t)$ -processens inverkan på priset. Priset i sin tur har inte någon inverkan på spelet. Vidare avgränsas modellen till ett konstant λ men på en verklig marknad kan likviditeten mycket väl förändras över tid.

Figur 4.7 visar hur priset förändras med tiden under en simulering och trots sin enkelhet ger modellen upphov till ett dynamiskt pris som vid en första anblick ser ut att kunna beskriva en verklig index tillgång. Notera att varken priset eller tiden har några absoluta referenser och tid- och prisskalan är godtyckliga.

Prisutvecklingen är förstas beroende av den stokastiska tilldelningen av strategier och för att kunna jämföra med empirisk data måste en statistisk analys göras. Som tidigare nämnt uppvisar verkliga handelsmarknader icke-normalfördelade fluktuationer, mer exakt innebär det att *avkastningen* R , inte är normalfördelad [5]. Vanligtvis definieras $R := \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{p(t)}$ för att få ett normerat värde på prisförändringen under Δt . Genom att skala $A(t)$ med λ blir prisförändringarna under ett kort intervall små och $p(t + \Delta t) = p(t) + \delta p$, $\delta p \ll p(t)$. Då kan avkastningen skrivas som



Figur 4.6: Ett exempel på poängutvecklingen över tid för agenternas bästa strategi, $\mathbf{P}^{max}(t)$, för olika grader av förutsägbarhet, se figur 4.4. Övre: $\alpha = 0.2$, mitten: $\alpha = 0.4$, undre: $\alpha = 0.6$.



Figur 4.7: Prisutveckling som funktion av tiden under en simulering av BMG med parametrar: $N = 101$, $m = 5$, $T = 1 \cdot 10^5$, $\lambda = 1000$.

$$R = \frac{\delta p}{p(t)} \approx \log \left(1 + \frac{\delta p}{p(t)} \right) = \log \left(\frac{p(t) + \delta p}{p(t)} \right) = \log \left(\frac{p(t + \Delta t)}{p(t)} \right) := R^{\log}. \quad (4.12)$$

Med priset definierat som ovan ger det

$$R^{\log} = \log \left(\frac{p(t + \Delta t)}{p(t)} \right) = \log \left(\frac{p(t) e^{\frac{A(t)}{\lambda}}}{p(t)} \right) = \log \left(e^{\frac{A(t)}{\lambda}} \right) = \frac{A(t)}{\lambda}. \quad (4.13)$$

Enligt den grundläggande teorin presenterad av Black & Scholes antas prisprocessen för en underliggande tillgång, här betecknad $S(t)$, lösa följande differentialekvation:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (4.14)$$

där μ , σ antas vara konstanta och $W(t)$ betecknar en brownsk rörelse [3, s. 287-288]. Lösningen till denna ekvation ges av

$$S(t) = S(0)\mathcal{E}(Y(t))$$

där $Y(t)$ uppfyller

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dW(t)$$

och \mathcal{E} är den stokastiska exponentialen [4, s. 129]. Enligt definition så är

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp \left(Y(t) - \frac{1}{2}[Y, Y](t) \right),$$

där $[Y, Y](t)$ är den kvadratiske variationen av $Y(t)$ för $t \in [0, t]$. Då $dt^2 = dt dW(t) = 0$ och $(dW(t))^2 = d[W, W](t) = dt$ [4, s. 109-111] fås här

$$\mathcal{E}(Y(t)) = \exp\left(\mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dW(s) - \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t ds\right). \quad (4.15)$$

Här tolkas integralen $\int_0^t dW(t)$ i Itô-mening [4, s. 91]. Slutligen ger ekvation (4.15) att

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)\right). \quad (4.16)$$

Avkastningen som definierad i ekvation (4.12) blir då för B&S prisprocess

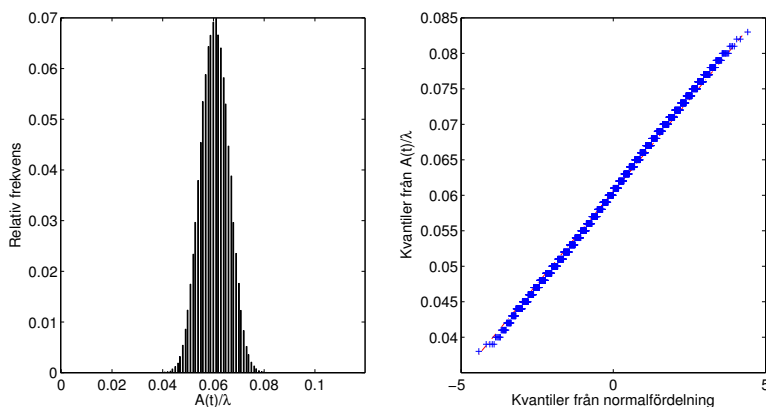
$$\begin{aligned} \log\left(\frac{S(t + \Delta t)}{S(t)}\right) &= \log\left(\frac{S(t)e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t))}}{S(t)}\right) = \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma(W(t + \Delta t) - W(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma G \end{aligned} \quad (4.17)$$

där $G \in N(0, \Delta t)$ under antagandet att $W(0) = 0$. Således följer det att R^{\log} i B&S är normalfördelad, vilket i vår modell skulle motsvara att $A(t)$ är en normalfördelad variabel för varje t .

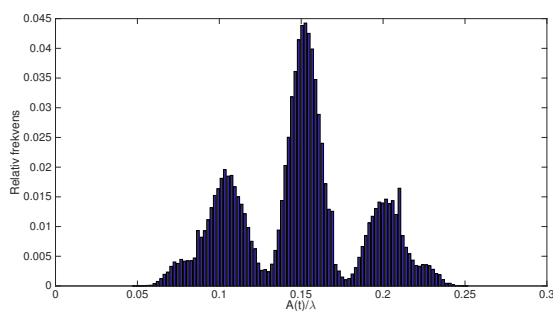
4.4 Brister som marknadsmodell

Simuleringar visar att BMG (precis som i B&S teori) i de flesta fall ger upphov till normalfördelade prisförändringar. Ett exempel av en sådan fördelning visas i figur 4.8. Resultatet representeras där av en QQ-plot vilket är ett grafiskt verktyg för att jämföra fördelningar. En mer ingående beskrivning av hur en QQ-plot skapas finns i appendix A.1. Några undantag har observerats framförallt för mycket små α då R^{\log} uppvisar orimliga fördelningar med flera disjunkta toppar, se figur 4.9. Icke-normalfördelade R^{\log} har även observerats för större α , inte entydigt för något α utan förekomsten varierar. På grund av BMG:s övriga brister som marknadsmodell utreds inte detta noggrannare då den egenskapen troligtvis inte bibehålls vid en utveckling av modellen.

BMG visar sig ha flera egenskaper som vi inte ser som önskvärda för att modellera en handelsmarknad. Den första och kanske mest uppenbara är att alla agenter måste agera i varje tidssteg. Det innebär att även om en agent har 2 strategier som alltid förlorar så kan hen inte avstå från att investera. En realistisk marknad borde ha ett varierande antal aktiva aktörer i varje tidssteg. Vidare så ska marknaden inte ha långsiktigt utnyttjad förutsägbarhet utan istället borde det finnas agenter som kontinuerligt utnyttjar ett sådant fenomen. I en vidareutveckling av modellen hoppas vi dessutom erhålla prisdata med egenskaper liknande de av empirisk data.



Figur 4.8: Fördelningen av $R^{\log} = \frac{A(t)}{\lambda}$ för en simulering av BMG med $\alpha = 0.26$ och $T = 100000$. Histogrammet till vänster och QQ-plotten är två representationer av samma sak; R^{\log} är mycket nära en normalfördelning. Det syns tydligast i QQ-plotten där kvantilerna för den simulerade datan väl följer de normalfördelade kvantilerna.



Figur 4.9: Fördelningen av $R^{\log} = \frac{A(t)}{\lambda}$ för en simulering av BMG med $\alpha = 0.013$ och $T = 100000$. För så små α är $\frac{A(t)}{\lambda}$ inte alls normalfördelade utan uppvisar en, för en marknad, mycket orimlig fördelning.

5 Grand Canonical Minority Game, *GCMG*

5.1 Modellen

För att göra en modell som är mer lik en finansmarknad utvecklas BMG till att ge agenterna möjligheten att avstå från att agera. Det ger upphov till ett spel med varierande *volym*, vilket är ett finansiellt mått på de samlade transaktionernas storlek på en marknad. Det nya spelet kan betraktas som ett vanligt BMG med skillnaden att antalet agenter ändras i varje tidssteg. Termodynamiska system med varierande partikelantal kallas storkanoniska varför den nya modellen får namnet *Grand Canonical Minority Game (GCMG)* [13]. Notera att modellen verkligen är en utveckling av BMG och har samma dynamik som densamma förutom de modifieringar som redovisas nedan. Vidare syftar ändringarna till att bättre kunna beskriva en finansmarknad.

För att agenterna ska kunna välja att avstå måste de värdera sina strategier mer än att bara jämföra vilken som relativt är bäst. Den tidigare poängsättningen av strategierna för en given historia μ uppdateras till

$$P_i^s(t+1) = P_i^s(t) - A(t)a_i^s(t) \quad (5.1)$$

och vidare införs villkoret att en agent i måste ha $P_i^{max}(t) > 0$ för att delta i spelet under tidssteg t . Notera att poängen inte längre förändras inkrementellt utan med storleken på $A(t)$. Detta medför att värdet av att tillhöra en minoritetsgrupp ökar ju mindre minoritetsgruppen är, och kan kopplas till att om det finns många köpare så kan säljare sälja till högre pris. För att göra själva algoritmen tydligare representeras nu köp/sälj av $a_i^s(t) \in \{1, -1\}$, agenterna kan nu även avstå för vilket $a_i^s(t) = 0$. Med $a_i(t)$ som agentens val (baserat på bästa strategi s) vid tiden t definieras nu $A(t)$ i ekvation (4.1) om till:

$$A(t) = \sum_i^N a_i(t). \quad (5.2)$$

Minoritetsgruppen $\Theta(t)$ bestäms då som

$$\Theta(t) = -\text{sgn}(A(t)) \in \{-1, 1\}, \quad (5.3)$$

där minusstecknet avspeglar att det fortfarande är ett minoritetsspel; är det exempelvis en övervikt av agenter som väljer 1 kommer $A(t) > 0$ och minoritetsgruppen blir -1.

Införandet av det tredje alternativet avstå gör dock att det inte längre nödvändigtvis finns någon minoritetsgrupp. Det är naturligt att inte betrakta valet att avstå som en likvärdig handling till att köpa/sälja utan istället betrakta det

som att antalet agenter i spelet varierar. Minoritetsgruppen $\Theta(t)$ bestäms alltså utifrån de aktiva agenterna. Det löser dock inte hela problemet för med ett udda N kan också ett udda antal agenter avstå vid ett givet tidssteg. Då skapas en möjlighet att de kvarvarande aktiva agenterna kan fördela sig helt jämnt över köp/sälj-grupperna och att det då saknas en väldefinierad minoritetsgrupp. I modellen innebär det att $A(t) = 0$.

Lösningen på detta problem är mer intrikat. Till att börja med konstateras att en sådan situation inte skulle vålla några bekymmer i verkligheten, på en verklig marknad finns inga krav på tydliga minoritetsgrupper. Råder jämvikt mellan köp och sälj så är konsekvensen att priset är oförändrat. Samma effekt uppvisar modellen då priset (ekvation (5.1)) i ett tidssteg beror på priset i tidsstegen innan och $A(t)$ vilken i scenariot ovan summeras till noll och priset är oförändrat.

Komplikationen uppstår då tecknet på $A(t)$ också används för att bestämma minoritetsgruppen som sedan läggs till historien agenterna använder för att ta beslut i nästa tidssteg. Det är som sagt inte meningsfullt att låta 0 vara ett likvärdigt val och därför kan 0 inte heller utgöra en minoritetsgrupp och bokföras i historien som ett gynnsamt val. I modellen hanteras detta genom att inte uppdatera historien utan i varje tidssteg slumpa fram någon av de $P = 2^m$ historier som är möjliga. Att det skulle lämna modellen oförändrad förefaller ointuitivt men våra simuleringar visar att modellens makroskopiska egenskaperna förefaller oförändrade, vilket också styrks av tidigare resultat [14]. Istället för att betrakta dem som de m tidigare tidsstegen gynnsamma utfall som ger en unik historia av P möjliga så representerar den tidigare historien $\xi(t)$ en stokastisk *händelse* som betecknas med $\xi(t) = \xi_k$, $k \in \{1, \dots, P\}$ som marknaden reagerar på, exempelvis en kvartalsrapport, politiska förändringar eller en flygplanskrasch. Förändringen har inte bara visat sig vara användbar i finansiella tolkningar utan den underlättar algoritmen avsevärt. De tidssteg för vilka $A(t) = 0$ kräver ingen specialhantering utan ger bara ett status quo där priset och poängen för samtliga strategier är oförändrade.

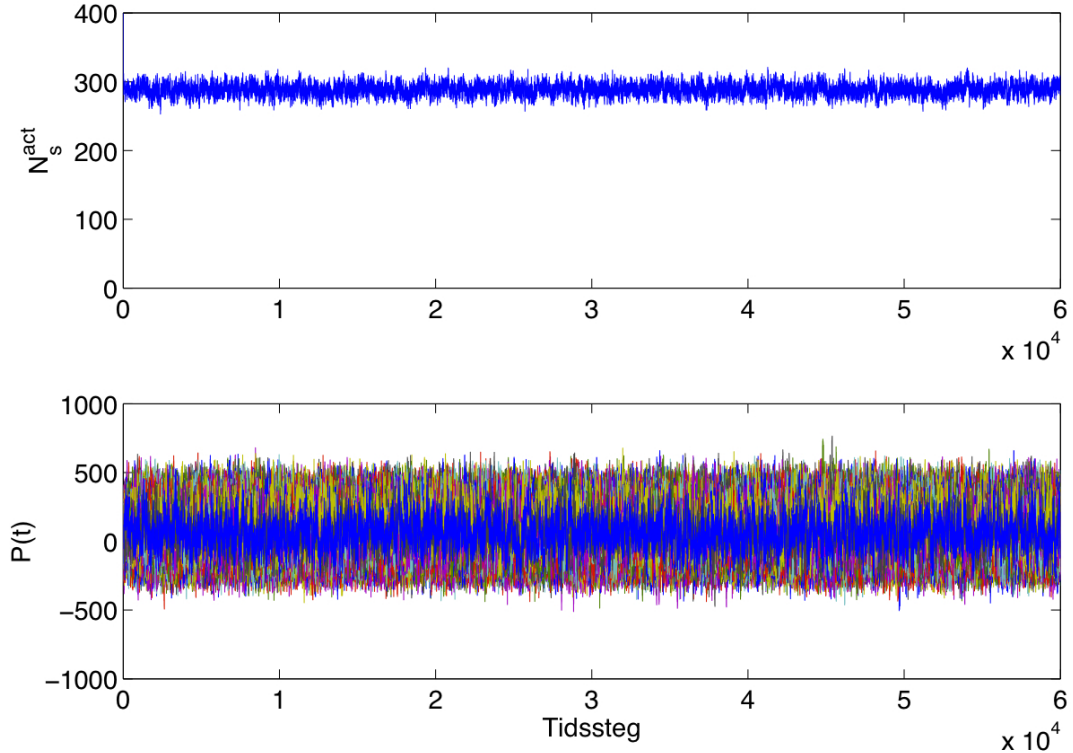
5.2 Aktivitet

Nu väcks frågan huruvida agenterna värderar alternativet att avstå på ett realistiskt sätt. Vi låter $N^{act}(t)$ beteckna antalet aktiva agenter vid tiden t . Låt $S_t := \{i \in \{1, \dots, N\} : P_i^{max}(t) > 0\}$, då är

$$N^{act}(t) = |S_t|,$$

där $|S_t|$ är antal element i mängden S_t .

Övre bilden i figur 5.1 visar att aktiviteten direkt ställer in sig kring ett medelvärde med relativt små fluktuationer kring medelvärdet oavsett hur långt spelet pågår. Vore spelets beteende konsistent med ett BMG som ju är ett negativsummespel borde strategierna till slut förlora kampen mot tiden och antalet aktiva

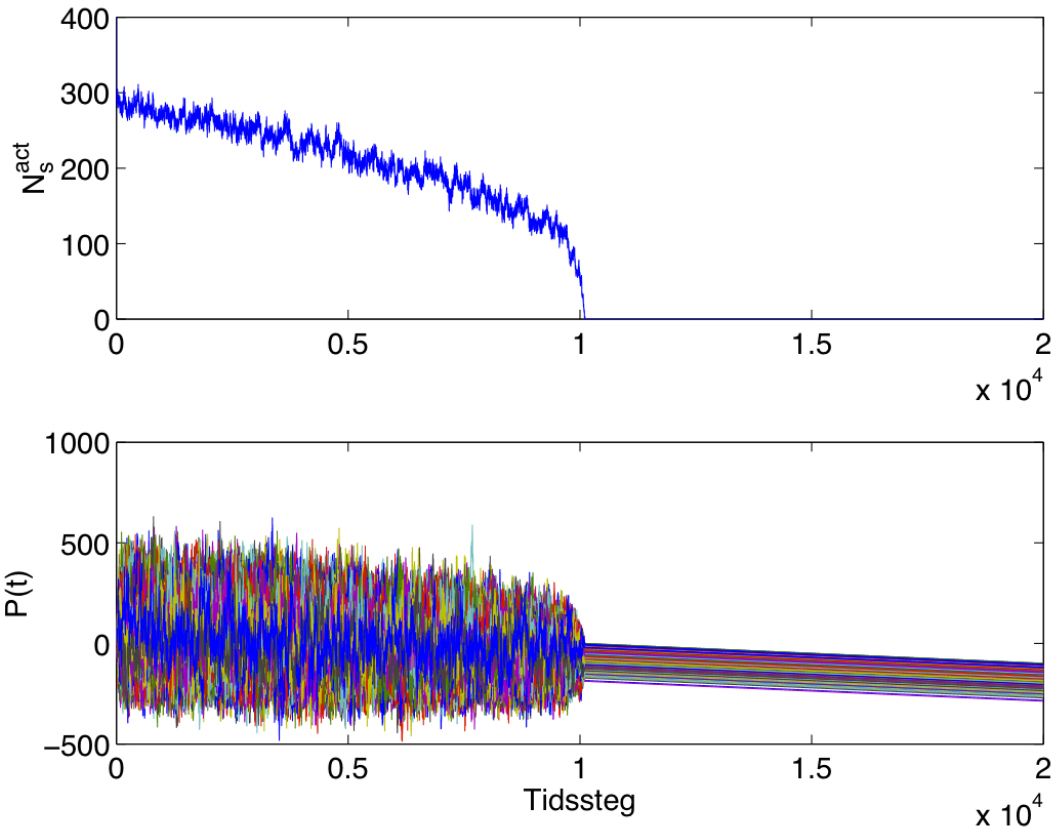


Figur 5.1: Aktivitet och poäng för en och samma simulering. Övre bilden: $N_s^{act}(t)$. Aktiviteten i spelet för en simulering med $N = 400$, $m = 6$, $T = 60000$. Samtliga agenter är med i första tidssteget då alla ges startpoäng för att spelet ska starta. Notera att aktiviteten inte går mot 0 utan fluktuerar kring $N_s^{act}(t) \approx 295$. Undre bilden: $\mathbf{P}^{max}(t)$.

agenter skulle sjunka ner till noll. Uppenbarligen gör möjligheten att avstå så att strategierna kan återhämta sig i någon mening. Det verkar då som att det i ett minoritetsspel är missgynnande för en strategi att användas då övriga agenter kan anpassa sig till denna. I samma figur visas också poängen för varje agents bästa strategi. Undre bilden i figur 5.1 uppvisar dock inte heller något intressant beteende för strategiernas bästa poäng utan $\mathbf{P}^{max}(t)$ fluktuerar starkt kring 0 och det tycks inte finnas någon särart bland agenterna, det vill säga ingen strategi har ett beteende som skiljer sig från övriga strategier.

För att ta ytterligare steg mot en mer realistisk marknad ges agenterna ett incitament att avstå genom att vi inför en ändring i poängsättningen,

$$P_i^s(t+1) = P_i^s(t) - A(t)a_i^s(t) - \varepsilon \quad (5.4)$$



Figur 5.2: $N_s^{act}(t)$ (övre bilden) och $\mathbf{P}^{max}(t)$ (undre bilden) för en simulering med $N = 400$, $m = 6$, $T = 20000$. Här är $\varepsilon = 0.01$ och dess inverkan på aktiva spekulanter syns tydligt när, i det här fallet, $N_s^{act}(t) = 0$ för $t \gtrsim 10000$.

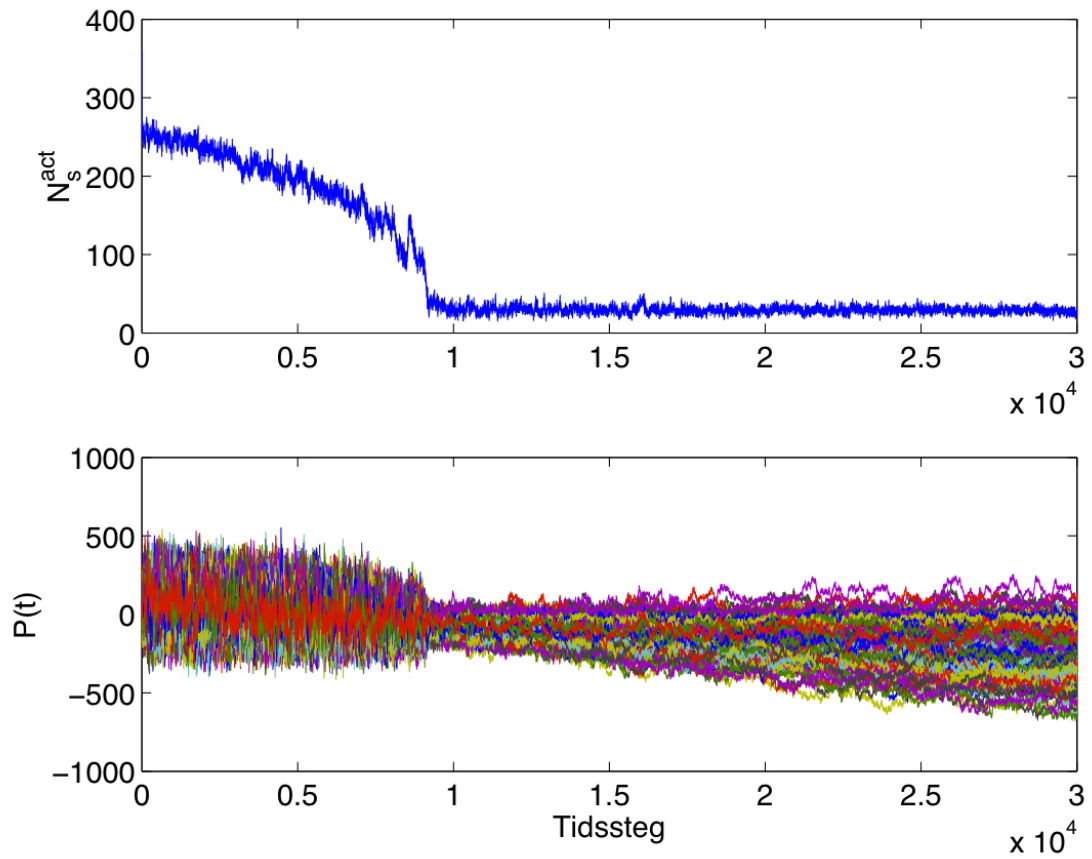
så att ε ger ett värde till det riskfria alternativet att avstå vilket kan ses som en möjlig ränteinkomst under ett tidssteg. Notera att ε inte utgör en konstant tröskel utan dras av i varje tidssteg; kravet $P_i^{max}(t) > 0$ innebär alltså att minst en av agentens strategier måste ha genererat mer värde än εt och först då går den vidare och väljer sin bästa strategi. Modellen utnyttjar en förenklad syn på räntan som här antas konstant i tiden, samtidigt antas att alla agenter har samma kapital i varje tidssteg som antingen ska investeras till fullo eller vara helt utanför marknaden. Vidare modelleras agenterna som helt riskneutrala och spekulerar på börsen framför en riskfri avkastning så fort en strategi historiskt har gett marginellt större avkastning än räntealternativet. Figur 5.2 visar att spelet nu beter sig som förväntat, det vill säga efter ett visst tidssteg finns inte längre några aktiva agenter. Dynamiken för denna ε -övergång kommer diskuteras senare i rapporten.

Vid en jämförelse av spelets dynamik i form av $\mathbf{P}^{max}(t)$ mellan den i BMG (figur 4.6) och figurer 5.1 och 5.2 verkar det som att ökad förutsägbarhet gör att poängutvecklingen i spelet ter sig mindre kaotisk. Det är också önskvärt att undvika ett scenario där alla agenter avstår i ett tidssteg eftersom detta blir en fixpunkt för systemet. I det fall alla agenter avstår ($P_i^{max}(t) \leq 0 \forall i$) så blir $A(t) = 0$ och $P_i^{max}(t+1) \leq P_i^{max}(t) \forall i$ för $\varepsilon \geq 0$. För att både tillföra förutsägbarhet i marknaden och undvika att modellen fastnar i $N^{act} = 0$ inför vi en ny typ av agenter kallade *producenter*. De har till skillnad från övriga agenter inte möjlighet att avstå och har dessutom bara en strategi tillgänglig. Det gör dem förutsägbara och de bidrar med information till spelet. Resterande agenter blir då åter benägna att delta i spelet för att utnyttja producenternas förutsägbarhet varför de hädanefter kommer benämnas *spekulanter*. Införandet av producenter motiveras med att de kan tänkas motsvara stabila, permanenta aktörer på en marknad, såsom fonder och storföretag som snarare än att spekulera för snabb vinning deltar för att bibehålla en närvaro på en viktig marknad. Den tolkningen stämmer även överens med den nya synen på historierna då sådana aktörer kan förväntas reagera förutsägbart på olika typer av nyheter eller händelser. Tanken är att spekulanterna ska utnyttja producenternas förutsägbarhet och lockas att vara aktiva på marknaden.

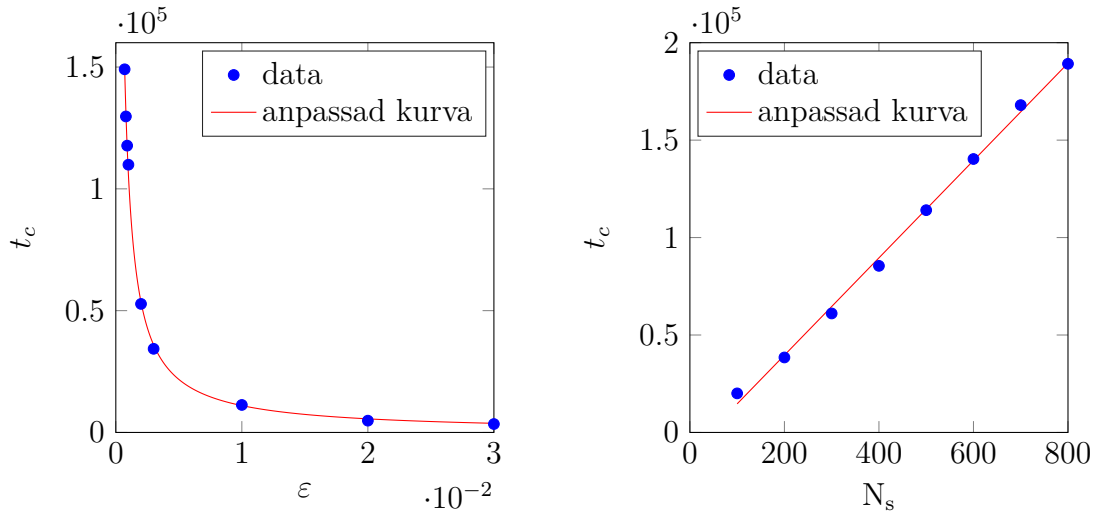
Hädanefter betecknas antalet producenter med N_p och antalet spekulanter med N_s , det gäller alltid att $N_s + N_p = N$. Figur 5.3 visar marknadsdynamiken med producenter. Med dem får GCMG en nollskild aktivitet även efter ε -övergången. Genom att införa ε och producenter får modellen alltså ett mer realistiskt riskfritt alternativ samtidigt som aktiviteten i spelet kan bibehållas på obestämd tid. Däremot har de här två nya frihetsgraderna gjort modellen betydligt mer komplex och för att förstå vad förändringarna innebär kommer vi i följande avsnitt undersöka parametrarnas och strategitilldelningens påverkan på modellodynamiken.

5.3 ε -övergång

Till att börja med delas dynamiken för GCMG upp i två distinkta delar då $\varepsilon > 0$ med vitt skild storlek på aktivitet, se figur 5.3. För att bestämma vilka parametrar som påverkar när övergången sker så har ett parametersvep genomförts, det vill säga att om en parameter, till exempel N_s varierar så är de andra konstanta. Det visar sig att tidpunkten t_c då övergången sker är beroende på parametrarna minne m , antal spekulanter N_s och ε . I figur 5.4 syns kurvanpassningen till data för de olika parametersvepen med avseende på epsilon och antal spekulanter. Ur figur 5.4 syns att beroendet för t_c som en funktion av epsilon är en potensfunktion enligt $f(\varepsilon) = C_1\varepsilon^{-1}$, där C_1 är en konstant. Antalet spekulanters påverkan inträffandet av t_c syns i figur 5.4, här beskrivs förloppet i stället med ett linjärt samband enligt $g(N_s) = C_2N_s$, där C_2 är en konstant. Värt att notera är att det endast är antalet spekulanter som påverkar när ε -övergången sker, inte andelen producenter eller



Figur 5.3: $N_s^{\text{act}}(t)$ (övre bilden) och $\mathbf{P}^{\text{max}}(t)$ (undre bilden) för en simulering med införda producenter och $\varepsilon > 0$. $N = 400$, $\frac{N_P}{N} = 0.05$, $m = 6$, $T = 30000$.



Figur 5.4: Tidpunkten t_c för övergången mellan turbulent och stabil fas som en funktion av ε i den vänstra figuren och antal spekulanter N_s i den högra figuren. I den vänstra figuren är en potensfunktion kurvanpassad till datapunkterna från modellen, den passar mycket väl och har formen $f(\varepsilon) = C_1\varepsilon^{-1}$. Den högra figuren visar istället upp ett tydligt linjärt samband enligt $g(N_s) = C_2N_s$. Parametrar är valda enligt $\varepsilon = 0.003$, $N = 500$, $m = 4$ när de inte är föremål för parametersvep.

det totala antalet agenter. Vilket minne agenterna tilldelas påverkar också när t_c inträffar, tyvärr kan här inte ses något tydligt samband. Det totala sambandet för t_c blir

$$t_c = C_3\varepsilon^{-1}N_s h(m), \quad (5.5)$$

där C_3 är en konstant och $h(m)$ är en funktion beroende av m .

Tidsstegen innan övergången sker betraktas som en period då systemet ställer in sig och hädanefter kommer systemet analyseras enbart efter övergången.

5.4 Volatilitet: α_c för GCMG

Genom variansen $\sigma^2 = \text{Var}[A(t)]$ kunde volatiliteten definieras som $\frac{\sigma^2}{N}$ vilken i BMG visades vara helt bestämd av $\alpha = \frac{P}{N} = \frac{2^m}{N}$, se figur 4.3. Simuleringar visar att det finns en motsvarande storhet i GCMG även om den inte är fullt lika välbestämd. Komplikationen uppstår då N inte längre är väldefinierad. Innan motsvarade N både det totala antalet agenter och antalet aktiva agenter eftersom ingen agent kunde avstå. Tolkningen av GCMG som ett BMG med ett varierande antal agenter i varje tidssteg talar för att byta N i ekvation (4.7) mot $N_s^{\text{act}}(t) + N_P$. Här finns ett uppenbart problem: Volatiliteten skulle då bero av m , N_P och $N_s^{\text{act}}(t)$

varav den sista ändras i varje tidssteg. För att bestämma σ^2 kommer det alltid finnas en "trade off" mellan den tidsberoende storheten aktiva spekulanter och det statistiska nyckeltalet varians; σ^2 får en bättre numerisk uppskattning ju fler tidssteg den beräknas över medan $N_s^{act}(t)$ får en sämre lokal uppskattning ju fler tidssteg medelvärden bildas över. Kvalitativa likheter med BMG kan ändå visas genom att ta det enklaste fallet då $N_s^{act}(t)$ och σ^2 uppskattas med medelvärdet respektive variansen över alla tidssteg. En sådan uppskattning ger samma karakteristiska kurva som i figur 4.3 med ett minimum för variansen för ett visst α_c . Däremot förlorar α sin roll som unik bestämmande av volatiliteten och både minimumet och storleken förskjuts med de nyinförda frihetsgraderna ε , $\frac{N_P}{N}$ och även N . Särskilt de sista två påverkar $N_s^{act}(t)$ och därför är det inte märkligt att de också styr variansen. Ett försök gjordes också med att använda kortare tidsintervall ($\Delta t = 100$ tidssteg) för att bestämma variansen för att på så sätt få en bättre uppskattning av $N_s^{act}(t)$. σ^2 och $N_s^{act}(t)$ uppskattades lokalt med $\frac{T}{\Delta t}$ punkter som variansen av serierna $\{A(t)\}_{t=t_i}^{t_{i+1}}$ respektive medelvärdet av serierna $\{N_s^{act}(t)\}_{t=t_i}^{t_{i+1}}$ där $0 = t_1 < \dots < t_{\frac{T}{\Delta t}} = T$ och $t_{i+1} - t_i = \Delta t$. Resultatet blir många mätpunkter för varje tidsserie men samtidigt kan alla projiceras på samma variabel α . Resultatet visas i figur 5.5 och ger en indikation om att en entydig variabel α kan finnas även för GCMG men med α som ovan sker minimumet vid olika värden för olika N . Slutsatsen blir att volatiliteten inte är lika väldefinierad som för BMG men den kan ändå användas i kvalitativa resonemang om modellens dynamik.

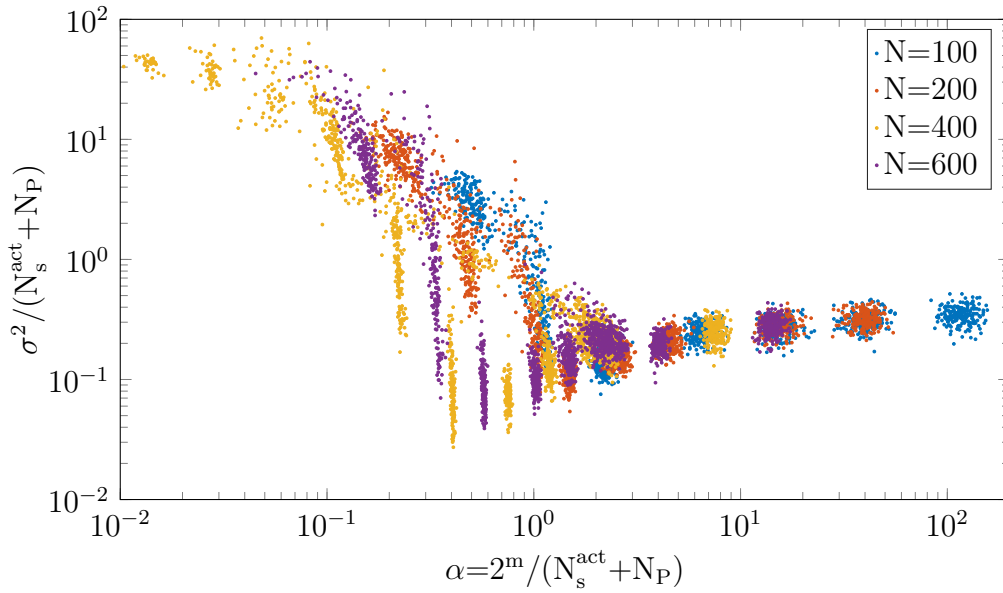
5.5 Aktiva spekulanter

Medelvärdet av antalet aktiva spekulanter N_s^{act} varierar med det totala antalet spekulanter N_s , samt olika värden på m och ε . Detta ses i figur 5.6 och har också visats i tidigare resultat [13]. Det observeras att för $\varepsilon = 0$ ökar N_s^{act} monotont med N_s . För $\varepsilon > 0$ får vi ett helt annat beroende, till en början ökar N_s^{act} med N_s som för $\varepsilon = 0$ men vid en punkt avviker detta och N_s^{act} avtar med N_s . Liknande resultat följer för olika värden på $P = 2^m$.

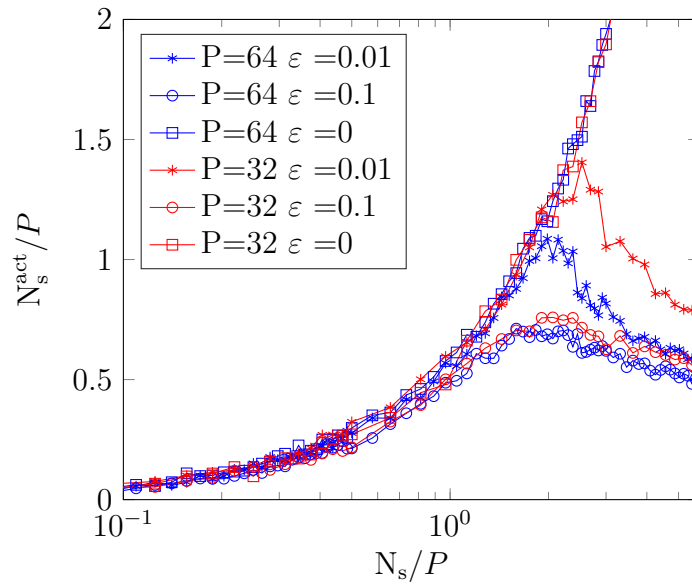
5.6 Förutsägbarhet

Med modifieringen att agenter nu kan avstå behövs ett nytt mått på om marknaden innehåller någon information. Problemet med ekvation (4.9) är spelet nu kan sakna minoritetsgrupp, vilket leder till att $P(1|\xi_k) + P(-1|\xi_k) \leq 1$. Vi introducerar istället ett nytt mått

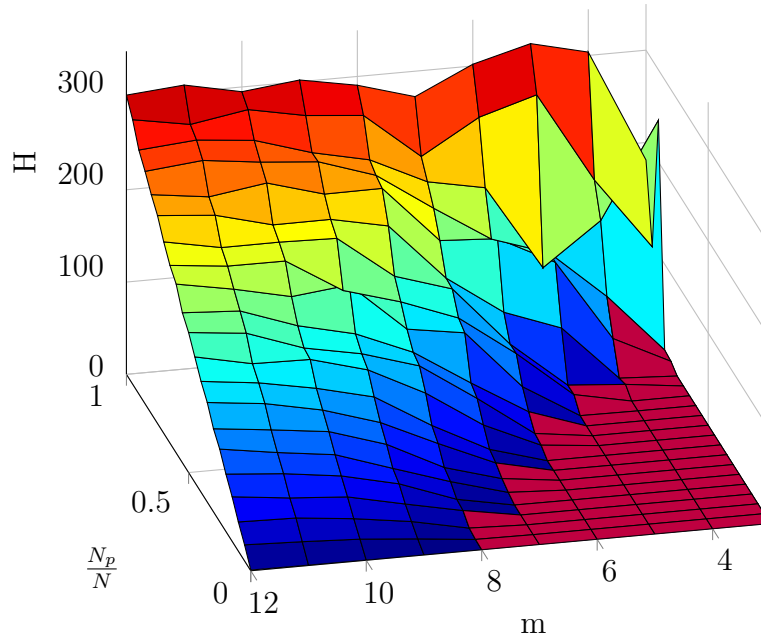
$$H = \frac{1}{P} \sum_{k=1}^P \langle A|\xi_k \rangle^2 \quad (5.6)$$



Figur 5.5: Volatilitet $\frac{\sigma^2}{N_s^{act} + N_P}$ som en funktion av $\alpha = \frac{P}{N_s^{act} + N_P}$ med en lokal uppskattning av storheterna med $\Delta t = 300$. Notera att antalet punkter blir så stort pga av det korta tidsintervallet.



Figur 5.6: Aktiva spekulanter N_s^{act} som funktion av totalt antal spekulanter N_s , skalade med P . Varje punkt är ett medelvärde över fem simuleringar med $T = 20000$.

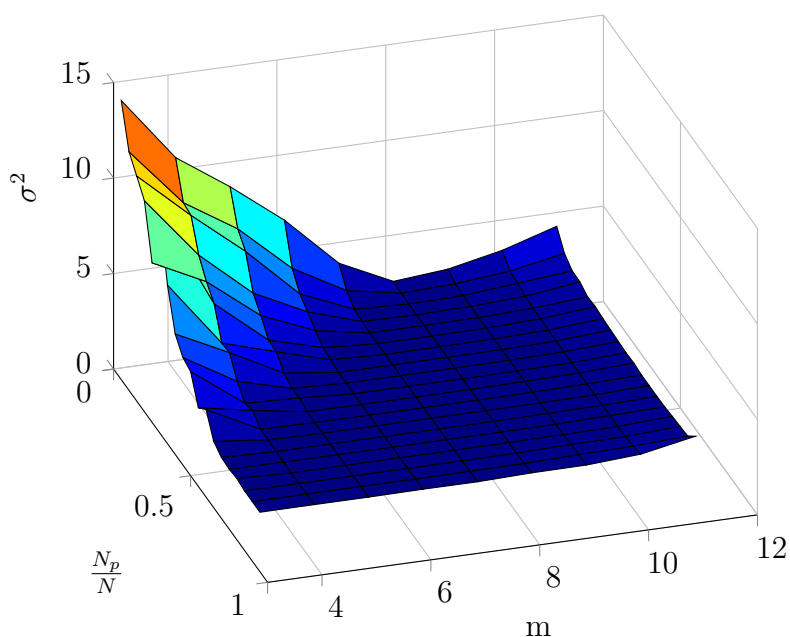


Figur 5.7: Mått på långsiktig förutsägbarhet i marknaden som funktion av m och andelen producenter $\frac{N_p}{N}$, $N = 300$ och $\varepsilon = 0.01$. Notera området där $H = 0$, alltså där spekulanterna utnyttjar all förutsägbarhet införd av producenterna. Värdet för varje parameterpar är ett medelvärde över $T = 40000$ och fem oberoende simuleringar.

där $\langle A|\xi_k \rangle$ är det uppskattade medelvärdet av $A(t)$ för $\xi = \xi_k$. H mäter således summan av $A(t)$:s avvikelse från noll för varje händelse ξ_k . Notera att detta ska ses som ett mått på långsiktig förutsägbarhet och att det under kortare tidsintervall kan förekomma även i det parameterområde där H långsiktigt är noll. Figur 5.7 visar H som funktion av m och kvoten $\frac{N_p}{N}$. Som tidigare påpekats ser vi det som realistiskt att all förutsägbarhet som införs av producenterna utnyttjas av spekulanterna på sikt. Notera därför området där $H = 0$, framöver kommer modellens parametrar begränsas till att hålla sig inom detta område.

5.7 Varierande volym

I tidiga simuleringar av GCMG uppvisade $N_s^{act}(t)$ ett nästan konstant beteende efter ε -övergången. Endast små oscillationer kring ett medelvärde observerades. Med kopplingen att antalet aktiva spekulanter i ett tidssteg motsvarar handelsvolym i en verklig marknad hade variation i serien $N_s^{act}(t)$ varit att föredra. Figur 5.8 visar variansen av serien $\left\{ \frac{N_s^{act}(t)}{\langle N_s^{act} \rangle} \right\}_{t=1}^T$ efter ε -övergången, där $\langle N_s^{act} \rangle$ är medel-

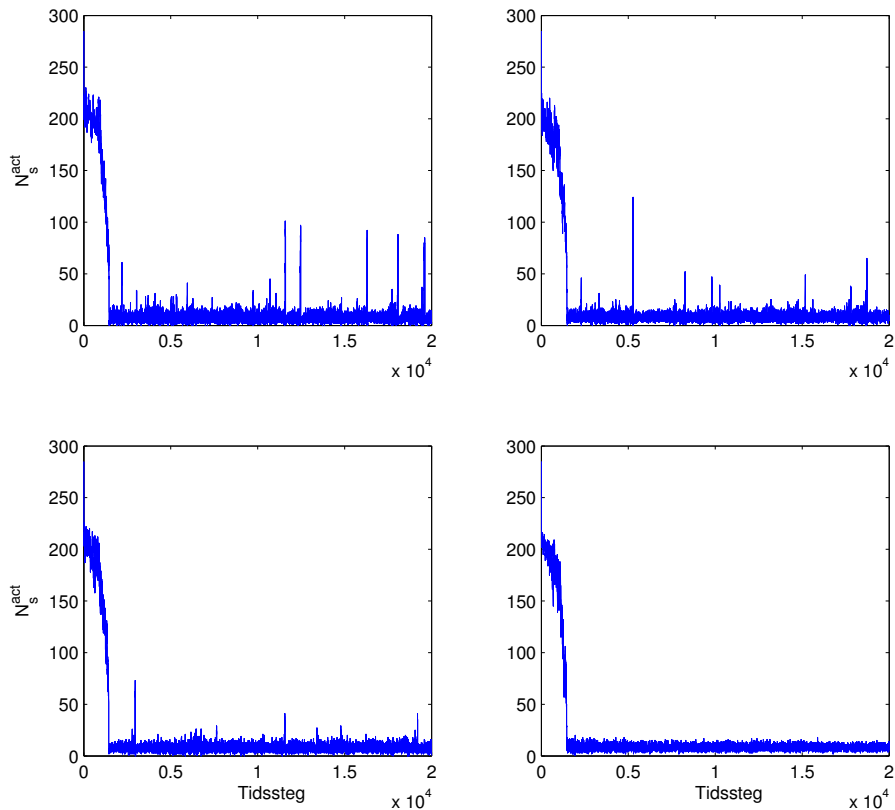


Figur 5.8: Relativ varians av $\{N_s^{act}\}_{t=1}^T$ som funktion av m och kvoten $\frac{N_p}{N}$ för $N = 300$ och $\varepsilon = 0.01$. Notera att området med högre relativ varians är likvärdigt med området där $H = 0$ från figur 5.7 (axlarna spegelvända jämfört med figur 5.7). Värdet för varje parameterpar är ett medelvärde över $T = 40000$ och fem oberoende simuleringar.

värdet av $\{N_s^{act}(t)\}_{t=1}^T$. Detta mått avses ge en bild av den relativa avvikelsen från medelvärdet. Som ses i figur 5.8 inträffar hög variation i volym inom området där $H = 0$ (se figur 5.7). Notera att detta område är för $\varepsilon = 0.01$, $N = 300$.

Figur 5.9 visar $N_s^{act}(t)$ för fyra olika simuleringar med samma parametrar. Dessa faller inom området för vilka $H = 0$ och den relativa variansen av $N_s^{act}(t)$ är hög, se figurer 5.7 och 5.8. Simuleringarna (i figur 5.9) skiljer sig endast med att agenterna fick nya strategier tilldelade för varje körning. Trots det varierar marknadsdynamiken kraftigt efter ε -övergången med stora spikar i $N_s^{act}(t)$ för vissa simuleringar. Slutsatsen är att detta måste vara en konsekvens av strategitilldelningen.

Spikarna i $N_s^{act}(t)$ är ett anmärkningsvärt och potentiellt gäckande resultat. Varierande volym är en av de viktigaste aspekterna i kopplingen till finansmarknaden och kan alltså inte till fullo styras med parameterinterval. Istället beror volymen även på de stokastiskt tilldelade strategierna vilket innebär att vi förlorar kontrollen över modellen och inte kan förutsäga dess beteende från fall till fall. Modellen bygger fundamentalt på att agenter växelverkar med slumpmässigt dragna strategier och att bryta det skulle förta dess syfte, utan istället måste en övergripande

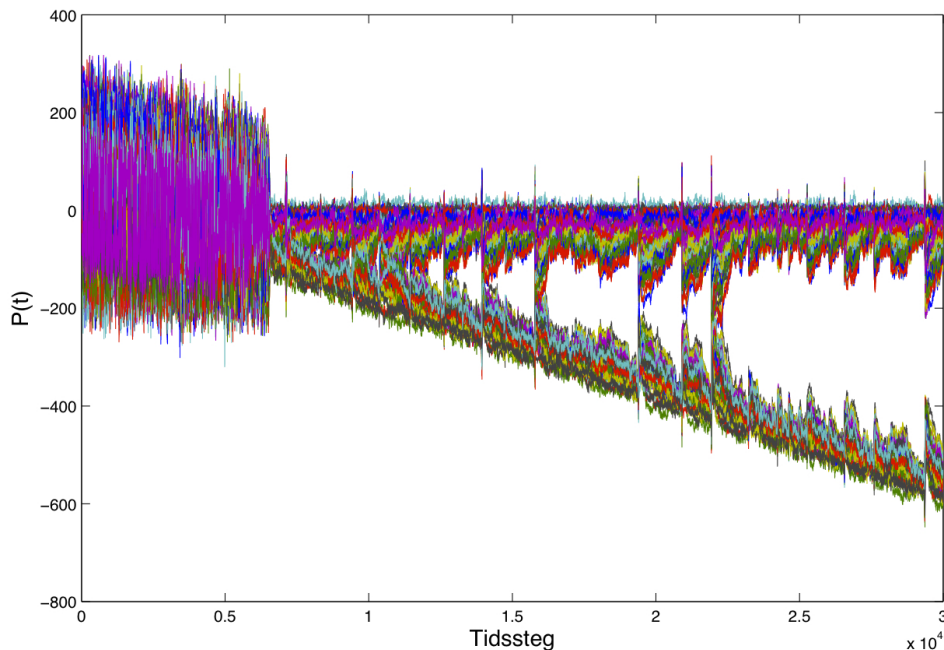


Figur 5.9: $N_s^{act}(t)$ för fyra olika simuleringar. Samma parametrar användes i samtliga, medan agenterna fick nya strategier tilldelade. Notera att marknadsdynamiken kan variera kraftigt från fall till fall, vilket antyder att den beror på strategitilldelningen.

mekanism kunna förklara skillnaden i marknadsdynamiken. Tidigare har strategiernas poäng undersökts för att påvisa förekomsten av förutsägbarhet och det visar sig att de också kan ge en förklaring till det här problemet.

5.8 Strategiernas gruppering

Figur 5.10 visar poängfördelningen $\mathbf{P}^{max}(t)$ för en simulering där stora spikar uppkommer i $N_s^{act}(t)$. När marknaden uppvisar denna typ av dynamik så sker tydliga, poängmässiga grupperingar mellan agenters strategier. Poängprocessen visar stundtals upp kraftiga fluktuationer i fas med att spikar uppkommer i $N_s^{act}(t)$. Att de är i fas är rimligt då en stor ökning i $N_s^{act}(t)$ kräver att $P_i^{max}(t-1) \leq 0$ medan



Figur 5.10: $\mathbf{P}^{max}(t)$ för en simulering inom parameterområdet där $H = 0$ och med hög relativ varians (se figurer 5.7 och 5.8). Strategierna delar upp sig på ett anmärkningsvärt sätt i två skilda grupper som delar upp sig kring den nya nollinjen $-\varepsilon t$.

$P_i^{max}(t) > 0$ för ett flertal agenter i . Notera att en spik i $N_s^{act}(t)$ inte nödvändigtvis måste sammanfalla med en spik i $P_i^{max}(t)$; ett större antal strategier skulle kunna gå marginellt över 0 utan att uppvisa en spik, det tycks dock inte ske här.

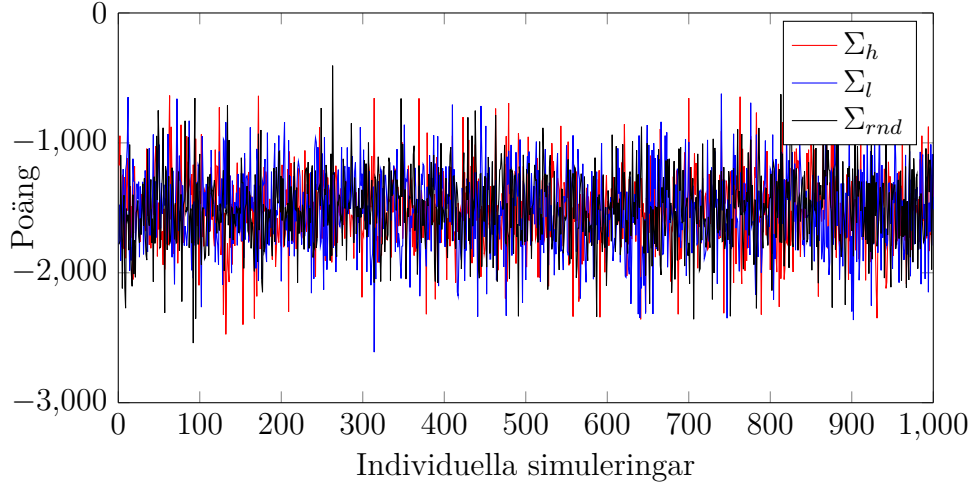
Flera hypoteser om vad som styr grupperingen har testats och nedan redovisas de två mest intressanta.

5.8.1 Strategiernas inbördes avstånd

Avstånden mellan olika strategier har undersökts i skalärproduktsmening. Hypotesen var att de strategier som är minst lika de övriga strategierna i skalärproduktsmening skulle i större utsträckning befinna sig i minoritetsgruppen och således även ha fler poäng efter ett avslutat spel.

En strategi i kan betraktas som en vektor med P element där varje element är strategins val för en specifik händelse ξ_k . För att understryka att det nu är strategierna och inte agenterna som undersöks betecknas nu en strategi som \mathbf{S}_i

Skalärprodukten för en strategi och varje annan strategi ses i denna hypotes



Figur 5.11: Antal poäng vid slutet av en simulering för de tre grupperna med olika skalärproduktsumma definierad enligt ekvation (5.7). Med parametrar $N=1001$, $\varepsilon = 0.01$, $m=4$, $T= 15000$.

som ett mått på hur lik en strategi är varje annan. Summan över skalärprodukten för en strategi med varje annan representerar då hur ”unik” strategin är enligt

$$\Sigma_i = \sum_{j=1}^{2N_s} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j. \quad (5.7)$$

Figur 5.11 visar medelvärdet av poängen för den hundradel av strategierna som har störst respektive minst skalärproduktsumma enligt ekvation (5.7), benämnda Σ_h respektive Σ_l samt en kontrollgrupp med lika många slumpmässigt utvalda strategier Σ_{rnd} . Ur figuren anas att ingen av strategigrupperna uppvisar genomgående högre slutpoäng gentemot de andra.

Detta undersöks vidare genom att låta $|L_{\Sigma_h}|$ svara mot det antal simuleringar som strategigruppen med störst skalärproduktsumma har högsta poäng, där $L_{\Sigma_h} = \{n : \Sigma_h^n > \Sigma_l^n, \Sigma_h^n > \Sigma_{rnd}^n\}$, $|L_{\Sigma_l}| \cdot |L_{\Sigma_{rnd}}|$ definieras analogt. Simuleringen i figur 5.11 ger att $|L_{\Sigma_h}| \approx |L_{\Sigma_l}| \approx |L_{\Sigma_{rnd}}|$. Detta medför alltså att det inte finns någon för- eller nackdel med att vara mer eller mindre lik de övriga strategierna i skalärproduktsmening och hypotesen måste förkastas.

5.8.2 Spekulanterers förhållande till producenternas samlade inverkan

Inledande görs en observation om gruppen producenter. Alla producenter agerar med endast en strategi, det vill säga att de gör alltid samma val för en viss händelse ξ_k . Genom att definiera mängden S_{Prod} som mängden av alla i så att agent i är

en producent, kan producenternas inverkan på $A(t)$ för varje händelse ξ_k beskrivas med vektorn \mathbf{A}_{Prod} innehållande P element som ges av

$$\mathbf{A}_{Prod}(\xi_k) = \sum_{i \in S_{Prod}} \mathbf{a}_i(\xi_k), \quad (5.8)$$

här är $\mathbf{a}_i(\xi_k)$ en producents svar på händelsen ξ_k . På grund av att producenterna bara har en strategi för en given händelse ξ_k är alltså $\mathbf{A}_{Prod}(t) \equiv \mathbf{A}_{Prod}$ konstant för alla tidssteg. Då $\mathbf{a}_i \in \{-1, 1\}^P$ ses det att $\mathbf{A}_{Prod} \in \{-N_p, \dots, N_p\}^P$. Vidare kan varje element i \mathbf{A}_{Prod} ses som en slumpvariabel som fastställs vid initialisering av strategierna, denna med medelvärde 0 och varians N_p (analogt med uträkningen i ekvationer (4.2) och (4.3)). \mathbf{A}_{Prod} har effekten att den rubbar förutsättningarna för minoritetsspelet i det att gör $A(\xi_k)$ partisk för antingen köp eller sälj, exempelvis ger en positiv $\mathbf{A}_{Prod}(\xi_k)$ möjligheten att en liten majoritet av spekulanter som väljer -1 ändå kan vinna i det tidssteget. Detta konstaterande ger upphov till en ny hypotes: det är fördelaktigt för strategier att motsäga \mathbf{A}_{Prod} för varje händelse ξ_k .

De kraftiga fluktuationer som uppkom i $N_s^{act}(t)$ (avsnitt 5.7) ser ut som finansvärldens ”bubblor” eller tillfälliga ”börsrusningar”. Vidare undersökning av händelseförloppet inne i en bubbla ger en viktig upptäckt, se figur 5.12. Varje bubbla avslutas abrupt med att alla deltagande spekulanter förlorar en stor mängd poäng i ett och samma tidssteg, t^* . För att det ska ske så krävs att alla deltagande spekulanter har samma svar på händelse ξ_{t^*} . Med den insikten undersöktes ifall uppdelningen som ses i figur 5.10 beror på en strategis svar på just ξ_{t^*} . Figur 5.13 är från samma simulering som figur 5.12 och visar hur alla strategiers poäng delar upp i sig i två tydliga grupper där grupperingen är entydigt bestämd av dess svar på denna extremhändelse, som nu betecknas ξ^* . Vad är då signifikant med ξ^* ? Genom att undersöka producenternas samlande inverkan för samtliga händelser ξ_k kan vi konstatera att

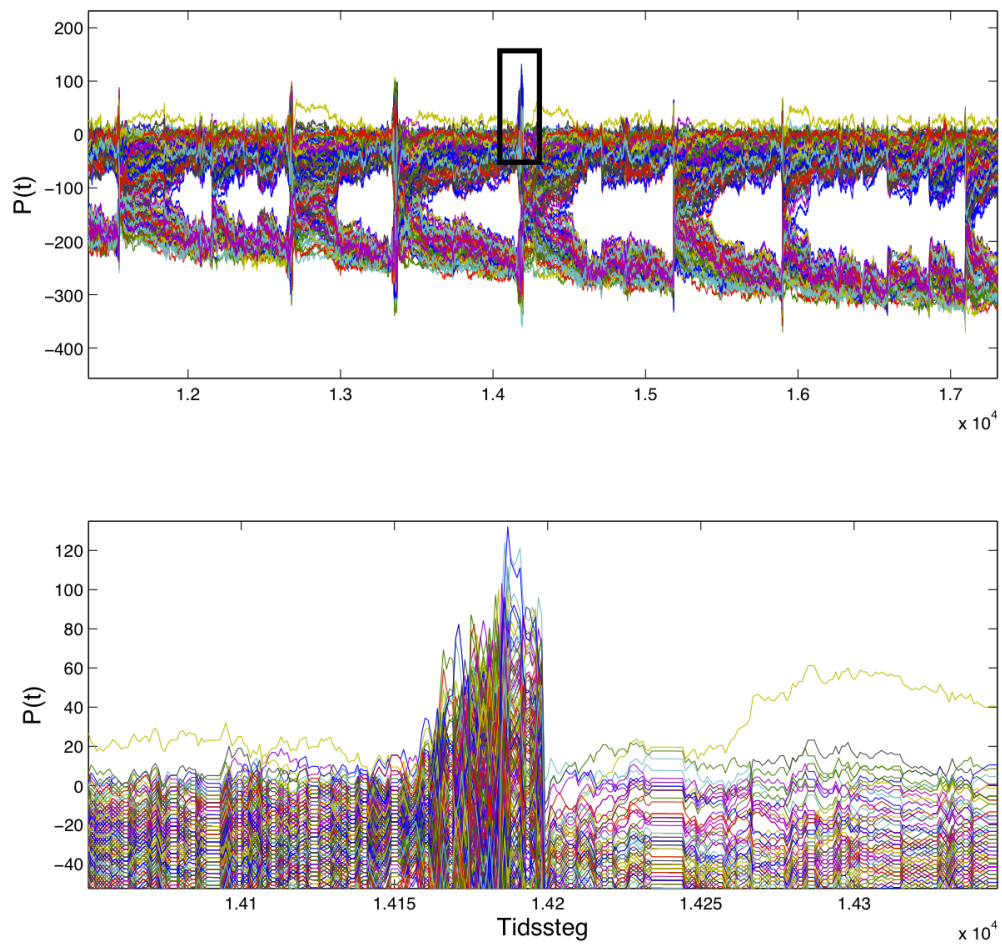
$$\xi^* = \underset{k}{\operatorname{argmax}} |\mathbf{A}_{Prod}(\xi_k)|, \quad (5.9)$$

alltså den händelse som svarar mot extremvärdet av \mathbf{A}_{Prod} . Ingen formell definition på vad som kvalificeras som ett extremvärde kommer att ges då detta beror på parametrarna i modellen och inget exakt samband har undersökts. Istället ges ett exempel för läsarens förståelse. I följande vektor är $\mathbf{A}_{Prod}(16) = 6$ ett tillräckligt extremvärde för att skapa en tydlig gruppering med parametrarna $m = 4$, $N = 300$, $\frac{N_p}{N} = 0.05$ och $\varepsilon = 0.01$.

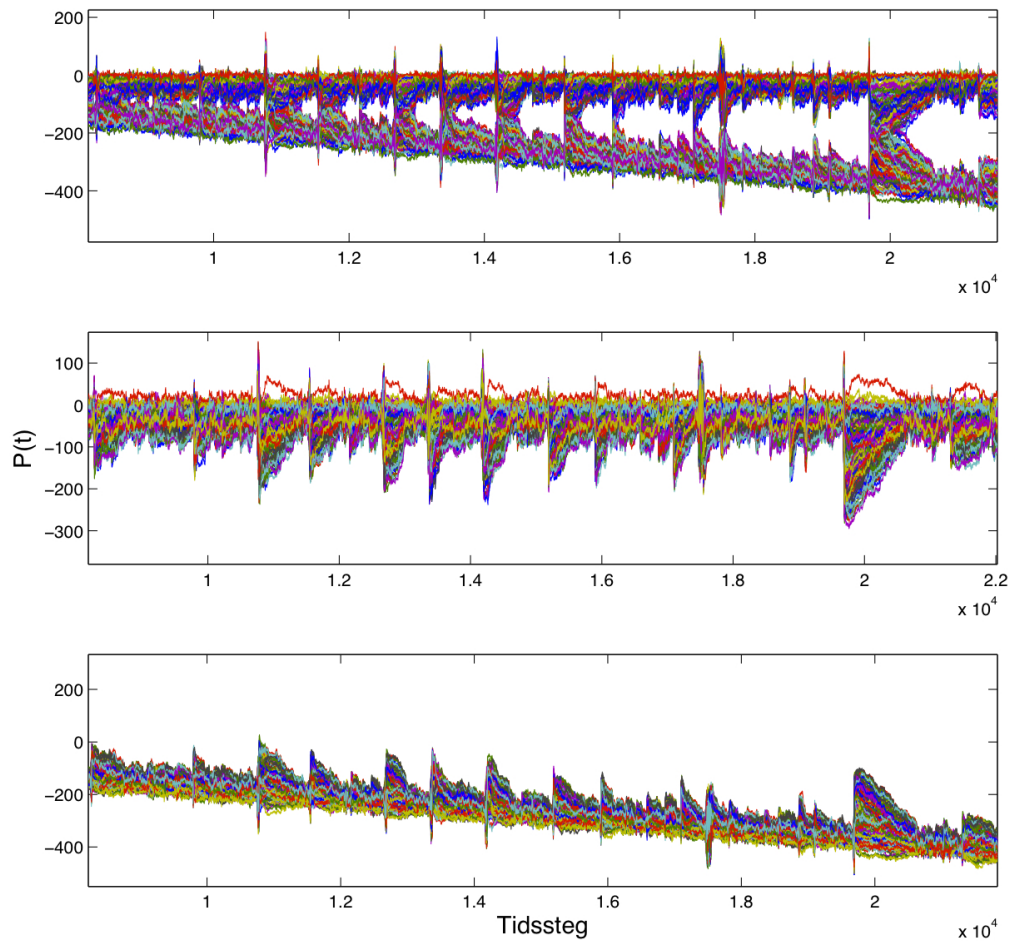
$$\mathbf{A}_{Prod} = \{-4, -4, -3, -3, -2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 6\}.$$

Härifrån definieras $L := \{k : |\mathbf{A}_{Prod}(\xi_k)| \geq |\mathbf{A}_{Prod}(\xi_i)| \forall i\}$, och vidare

$$\Pi^\xi = |L| \quad (5.10)$$



Figur 5.12: En inblick i vad som händer inne i en bubbla. Figuren visar $\mathbf{P}^{max}(t)$ för alla agenter (Över), och en inzoomning av dynamiken inne i en bubbla (Under). Det är tydligt att kollapsen av bubblan sker under *ett* kritiskt tidssteg.



Figur 5.13: Gruppering av alla strategiers poäng för ett entydigt ξ^* , $\Pi^\xi = 1$. Figuren visar poängprocessen för samtliga strategier (Över), poängprocessen för de strategier som går emot producenterna för $\xi(t) = \xi^*$ (Mitten), och poängprocessen för de strategier som följer producenterna för $\xi(t) = \xi^*$ (Under).

som antalet *extremhändelser* ξ^* . Det är underförstått att $\mathbf{A}_{Prod}(\xi^*)$ är tillräckligt avvikande för att skapa gruppering i marknaden. Här följer resultat för olika Π^ξ .

5.8.2.1 Fallet $\Pi^\xi = 1$

Detta fall är förenligt med det som diskuterats ovan. Efter en mängd simuleringar kan vi konstatera följande anmärkningsvärda resultat: poängfördelningen för strategierna grenar ut i två grupper som är entydigt bestämda av strategins svar på händelse ξ^* . De strategier som går emot producenterna då $\xi(t) = \xi^*$ (till exempel säljer när producenterna nettoköper) har en poängprocess som håller sig runt noll och har chansen att vara med i alla bubblor. De strategier som agerar i samma riktning som producenterna för $\xi(t) = \xi^*$ får en poängprocess som har en nedåtgående trend och återhämtar sig aldrig, se figur 5.13. Vidare så har det observerats att varje bubbla avslutas med den första uppkomsten av extremhändelsen ξ^* (den första uppkomsten efter det att bubblan inletts). Intensiteten av bubblor ökar med $|\mathbf{A}_{Prod}(\xi^*)|$. Händelsen ξ^* liknar en katastrofal händelse som avskräcker från spekulation på marknaden.

5.8.2.2 Fallet $\Pi^\xi = 2$

Med två olika extremhändelser (ξ_1^*, ξ_2^*) ändras dynamiken något även om marknaden behåller en liknande karaktär. Ett exempel på en vektor \mathbf{A}_{Prod} som ger gruppering i marknaden i detta fallet är:

$$\mathbf{A}_{Prod} = \{-7, -4, -3, -3, -2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 7\},$$

för parametrar $m = 4$, $N = 300$, $\frac{N_p}{N} = 0.05$ och $\varepsilon = 0.01$. Här motsvarar $\xi_1^* = 1$ och $\xi_2^* = 16$ de två extremhändelserna. Poänggrupperingen mellan olika strategier är inte längre entydigt bestämd av en händelse ξ^* , istället bildas nu fyra olika grupper. Med $\mathbf{S}_j(\xi_k)$ som beteckning för valet vid händelse ξ_k av strategi j , där $j \in \{1, \dots, 2N_s\}$ definieras mängderna D_1 , D_2 enligt

$$D_i = \{j \in \{1, \dots, 2N_s\} : \text{sgn}(\mathbf{S}_j(\xi_i^*)) = \text{sgn}(A_{Prod}(\xi_i^*))\}. \quad (5.11)$$

Strategierna kan så delas in i de fyra disjunkta grupperna:

$$\mathbf{S}_j \in \begin{cases} G_{11} & \text{om } j \in (D_1 \cap D_2) \\ G_{10} & \text{om } j \in (D_1 \setminus D_2) \\ G_{01} & \text{om } j \in (D_2 \setminus D_1) \\ G_{00} & \text{om } j \notin (D_1 \cup D_2) \end{cases} \quad (5.12)$$

Här tappas vi möjligheten att på samma sätt entydigt bestämma en händelse som spräcker alla bubblor. I föregående fall bildades två grupper varav den med

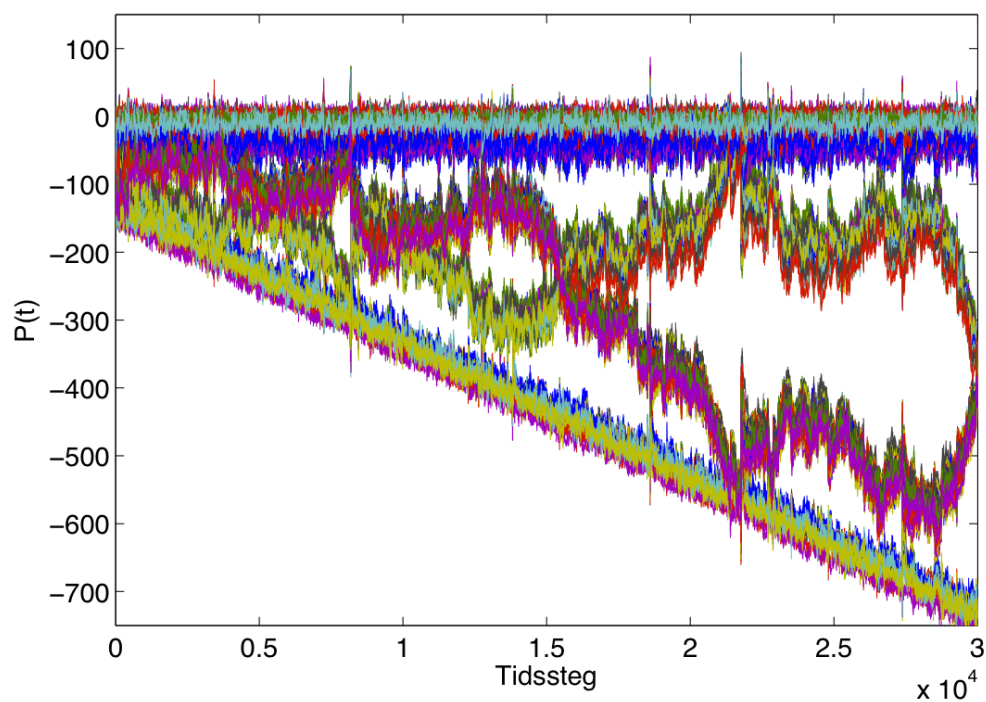
en nedåtgående poängprocess snabbt tappade möjligheten att delta i spelet (en strategi med för låg poäng används ej). Det ledde till att de aktiva spekulanterna i en bubbla, för en specifik händelse ξ^* , tog samma beslut. Således kom alla att förlora en stor summa poäng i samma tidssteg. Skillnaden här, som ses i figurer 5.14 och 5.15, är att utöver gruppen G_{00} kan de två grupperna G_{01} , G_{10} delta i en bubbla. På så sätt hamnar marknaden i ett läge där det inte behöver finnas en händelse för vilken alla aktiva spekulanter tar samma beslut. Däremot ses i figurer 5.14 och 5.15 att majoriteten av bubblorna byggs upp enbart av spekulanter i grupp G_{00} , varför någon av historierna (ξ_1^*, ξ_2^*) ofta är tillräcklig för att spräcka en bubbla. Även här ökar intensiteten av spikar i poängplotten med $|\mathbf{A}_{Prod}(\xi_i^*)|$.

5.8.2.3 Fallet $\Pi^\xi > 2$

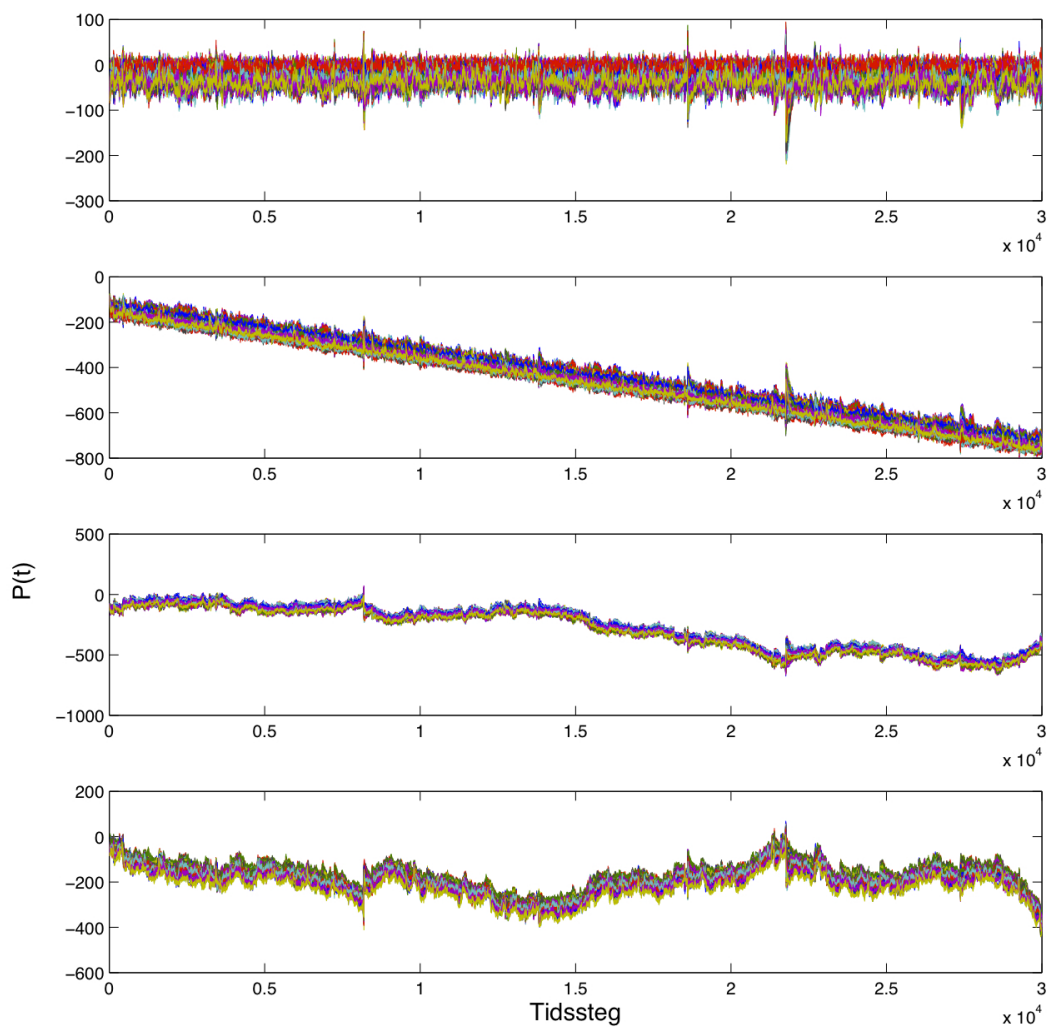
Det har observerats att mönstret fortsatt gäller då vi inför tre extremvärden i \mathbf{A}_{Prod} . Det är värt att notera att dessa värden naturligt behöver vara större än det för fallet med ett unikt ξ^* (för att fortfarande utmärka sig). Poängprocesserna för strategierna nu upp sig i åtta olika grupper som är entydigt bestämda av hur de agerar för de olika extremhändelserna ξ_i^* . Grupperingen är analog med den i ekvation (5.12). Poängens utveckling för de sex 'mittengrupperna' liknar de för G_{01} , G_{10} i fallet $\Pi^\xi = 2$ och således blir poängprocesserna för samtliga strategier lik figur 5.14, men med sex olika grupper som pendlar mellan G_{000} och G_{111} . Det blir naturligt att skapa en hypotes om att poängprocessen för samtliga strategier delar upp sig i 2^{Π^ξ} grupper, men för Π^ξ stort nog tappar $\mathbf{A}_{Prod}(\xi^*)$ effekten som extremvärde marknadsdynamiken går mot den i figur 5.3.

5.8.2.4 Anmärkning

Strategiernas uppdelning till följd av extremhändelserna förutsätter en rimlig fördelning av strategier mellan grupperna. Vidare har fenomenet endast undersökts för $s = 2$ och i den del av parameterutrymmet med hög relativ varians för $\varepsilon = 0.01$ (se stycke 5.7).



Figur 5.14: $\mathbf{P}^{max}(t)$ då \mathbf{A}_{Prod} innehåller två extremvärden. Det blir synligt att uppdelningen sker i fler än två grupper. I figur 5.15 visas poängprocessen för de strategier som tillhör de fyra olika grupperna definierade i ekvation (5.12). Notera att dessa grupper tillsammans representerar denna figur.



Figur 5.15: Gruppuppdelningen av figur 5.14. Här visas poängprocessen för följande strategier: $\mathbf{S}_j \in G_{00}$ (Överst), $\mathbf{S}_j \in G_{11}$ (Andra ovanifrån), $\mathbf{S}_j \in G_{01}$ (Tredje ovanifrån), $\mathbf{S}_j \in G_{10}$ (Nederst). Se ekvation (5.12) för definition av grupperna.

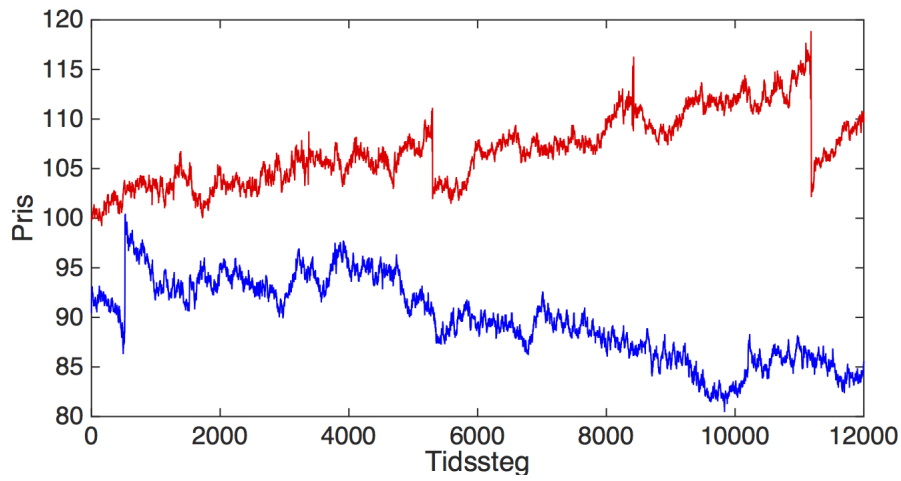
6 Finansiell tillämpning av GCMG

På samma sätt som BMG kopplades till en aktiemarknad i avsnitt 4.3 analyseras nu den färdiga GCMG för att se om den uppvisar de kvalitativa egenskaper som återfinns i riktiga marknader. Dessa egenskaper, oberoende och icke-normalfördelade R^{\log} samt volatilitetshopning, diskuterades redan i stycke 1 men det är först nu modellen kan sättas på prov. Varje steg i utvecklingen har motiverats med finanskopplingen men statistisk analys och jämförelse med empirisk data och tidigare resultat behövs för att bedöma huruvida den slutliga prisprocessen förmår beskriva en aktiemarknad.

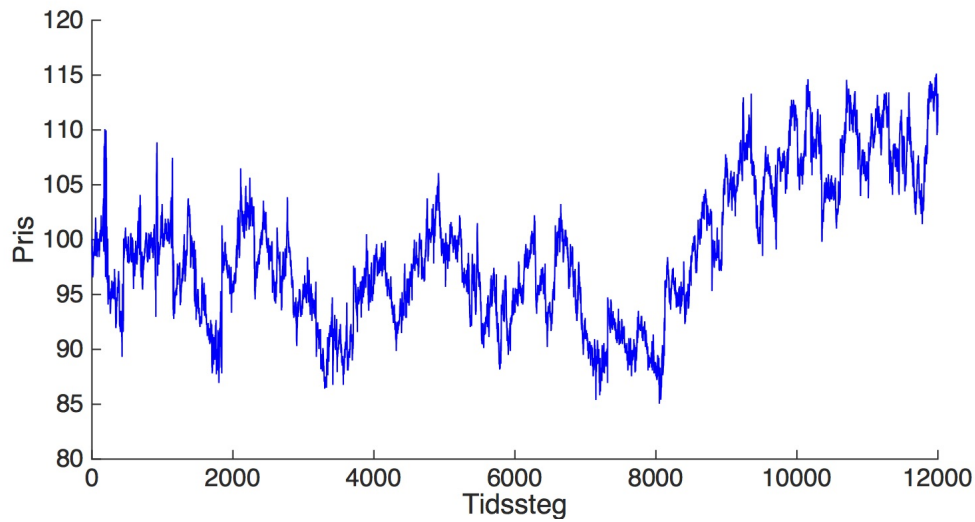
Tidigt i modellarbetet (avsnitt 5.2) konstaterades att en realistisk modell bör ha en förhållandevis stor relativ varians för $N_s^{act}(t)$. Det är dock problematiskt att modellen i stor utsträckning beror på samtliga frihetsgrader (parametrar och strategitilldelning). Lyckligtvis kan vi med resultaten i avsnitt 5.8.2 i stor utsträckning kontrollera modelldynamiken med hjälp av producenterna. Genom att studera hur extremhändelser påverkar priset kan vi därifrån dra slutsatser om vilka som bäst passar en finanstillämpning. Notera att modellens parametrar i övrigt befinner sig i det område för vilket den relativa variansen av $N_s^{act}(t)$ är stor som beskrivet i avsnitt 5.7. För att ge en bild av vad analysen innebär redovisas först hur priset $p(t)$ kan se ut för en simulering av GCMG.

För fallet med en extremhändelse i \mathbf{A}_{Prod} ($\Pi^\xi=1$ i ekvation (5.10)) finns varianterna där $\mathbf{A}(\xi^*)$ antingen är positiv eller negativ. I figur 6.1 visas ett exempel på prisutvecklingen för båda fallen och där syns tydligt att trenden på priset följer tecknet på $\mathbf{A}(\xi^*)$. Vidare syns att trenden bryts av spikar åt motsatt håll; kraftiga prisfall för $\mathbf{A}(\xi^*) > 0$ och vice versa. Prisprocessen för $\mathbf{A}(\xi^*) > 0$ kan tänkas ha en realistisk koppling på ett globalt och långt tidsperspektiv eftersom ekonomin i stort har en historisk dragning uppåt av den tillväxt som kommer från teknologiska effektiviseringar och upptäckandet av nya naturresurser, samtidigt som det förekommer kraftiga temporära nedgångar till följd av isolerade händelser. Priset med negativ trend (för $\mathbf{A}(\xi^*) < 0$) har eventuellt tillämpningar för något specifikt scenario men utreds inte vidare här.

Prisprocessen som genereras i fallet med två extremhändelser med olika tecken ($\Pi^\xi = 2$ i ekvation (5.10)) visas med ett exempel i figur 6.2. Där syns att den saknar den uppåt- eller nedåtgående trend som fanns för en extremhändelse och har potential fungera som en prisprocess på kortare sikt. Alternativt kan det beskriva något annat än en aktie som inte har en naturlig trend uppåt som till exempel en valutakurs. Prisprocessen med två extremhändelser bedöms vara mest användbar för rapportens syfte. Därför är det den som kommer att analyseras statistiskt. Notera att de trender som observerats för prisprocesserna och som styrs av extremhändelsernas antal och tecken gäller generellt i detta parameterområde.



Figur 6.1: Prisutveckling för GCMG för två fall med $\Pi^\varepsilon = 1$. Den röda grafen är prisprocessen med ett positivt extremvärde och den blå med ett negativt.



Figur 6.2: Prisutvecklingen för GCMG med ett positivt och ett negativt extremvärde i $\mathbf{A}_{Prod} = \{-10, -4, -3, -3, -2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 10\}$, med $m=4$, $\varepsilon=0.01$, $N=300$ och $\frac{N_P}{N}=0.05$.

6.1 Fördelning av R^{\log}

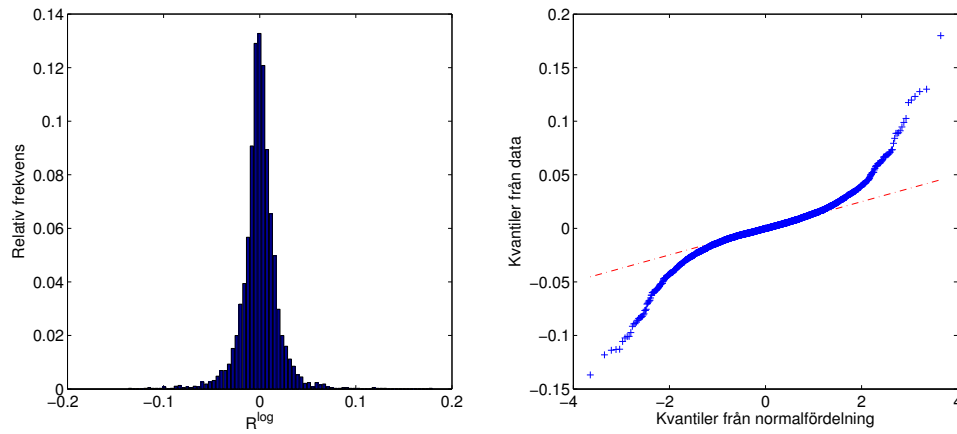
En stor brist hos vissa konventionella teorier är just fördelningen av R^{\log} som antas normalfördelad, vilket diskuteras i avsnitt 1, medan den agentbaserade modellen förväntas kunna ge icke-normalfördelad avkastning. För att testa den tesen och jämföra fördelningen av R^{\log} , från prisprocessen i GCMG, med en normalfördelning användes en *Quantile-Quantile Plot* (QQ-plot). De uppskattade kvantilerna från ett dataset plottas mot de teoretiska kvantilerna för en normalfördelning. Om fördelningarna är ekvivalenta ska punkterna följa en rät linje. För en mer ingående beskrivning se appendix A.1. Figur 6.3 visar ett exempel på fördelningen av R^{\log} för empirisk data (dagliga stängningskursen för aktien General Electric). QQ-plotten till höger i figur 6.3 visar på att fördelningen är väl centrerad kring noll (från linjens lutning) medan ett flertal stora avvikelser förekommer. R^{\log} följer inte en normalfördelning utan vridningen *moturs* av de yttre kvantilerna ger upphov till en S-formad kurva i QQ-plotten. Detta implicerar att fördelningen av tidsserien har tjockare svansar jämfört med en normalfördelning. Exemplet är menat att underlätta för läsarens förståelse av erhållna simulerade resultat. Djupare analyser av empirisk data har gjorts på flera håll och resultaten kommer inte återupprepas här [5] [15]. I figur 6.4 visas en motsvarande undersökning av $R^{\log} = \frac{A(t)}{\lambda}$ för prisprocessen i GCMG. Fördelningen av $A(t)$ beror på modellens parametrar och på Π^ξ (ekvation (5.10)) och $|\mathbf{A}_{Prod}(\xi^*)|$. Jämförelse av figurer 6.3 och 6.4 visar att modellen har potential att efterlikna empirisk fördelning av storheten R^{\log} på ett bra sätt. Vi kan visa att för rätt \mathbf{A}_{Prod} avtar R^{\log} -fördelningens svansar med en potenslag (se figur 6.5), vilket även är vad fördelningen för R^{\log} hos empirisk data uppskattas avta med [5]. Slutsaten blir att modellen har samma kvalitativa egenskaper som empirisk data, men precis som riktiga aktier varierar den exakta fördelningen från fall till fall.

6.1.1 Alternativ fördelning

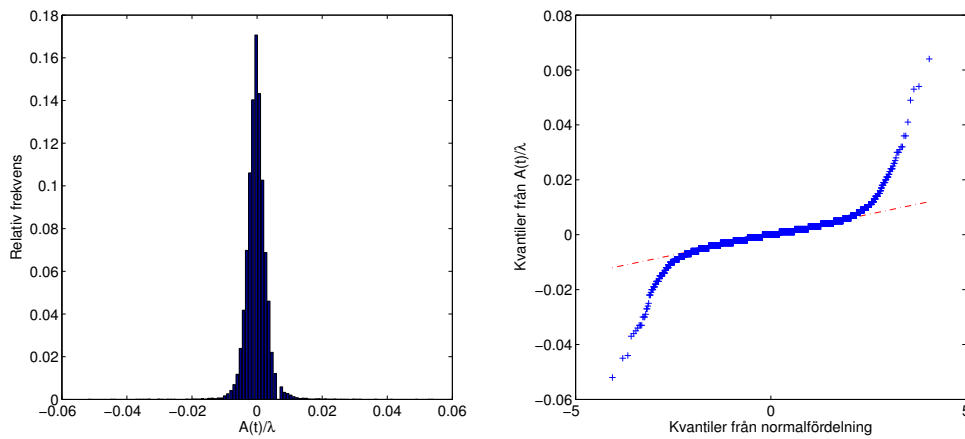
Eftersom R^{\log} för såväl empirisk data som för GCMG alltså inte är normalfördelade är det intressant att undersöka alternativa fördelningar att approximera dem med. Några kriterier behöver dessa dock klara av, till exempel ska de ha tjocka svansar som konstaterats tidigare i stycke 6.1. En sådan alternativ fördelning är en Cauchyfördelning med pdf:

$$p(x) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + x^2}. \quad (6.1)$$

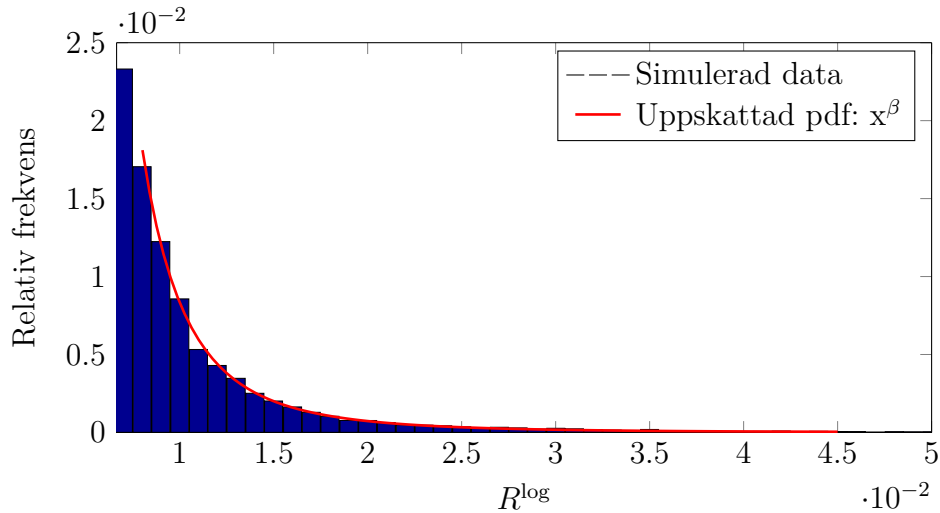
Den saknar både väntevärde och varians, vilket gör att det är en av de enklaste fördelningarna med tunga svansar [16] och därför undersöktes den närmare. Pdf:en avtar dessutom med en potens för stora x , dock något långsammare än i figur 6.5



Figur 6.3: Histogram och QQ-plot över R^{\log} beräknat på serien av dagliga stängningskurser för aktien General Electric under perioden 000602-150513. I QQ-plotten indikerar lutningen på den streckade linjen och vridningen moturs av de yttre kvantilerna att R^{\log} följer en fördelning med tjockare svansar än en normalfördelning.



Figur 6.4: Histogram och QQ-plot över R^{\log} från simulering av GCMG. Här var $\mathbf{A}_{Prod} = \{-7, -4, -3, -3, -2, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 7\}$, $m = 4$, $\varepsilon = 0.01$, $N = 300$, $\frac{N_p}{N} = 0.05$. Notera likheter med empirisk data i figur 6.3.



Figur 6.5: Simulerad fördelning av R^{\log} och en anpassad pdf i form av en potenslag $(R^{\log})^{\beta}$. Notera att histogrammet är beskuret vid $0.2\sigma \approx 0.008$ eftersom potenslagsbeteendet endast finns för stora $|R^{\log}|$. I grafen är $\beta \approx -3.5$ och passar mycket väl till datan som alltså bara är beskuren med en bråkdel av en standardavvikelse. Simuleringen är gjord med $\Pi^{\xi} = 2$, $\mathbf{A}_{Prod} = \{-10, -5, -4, -4, -3, -2, -1, -1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 10\}$.

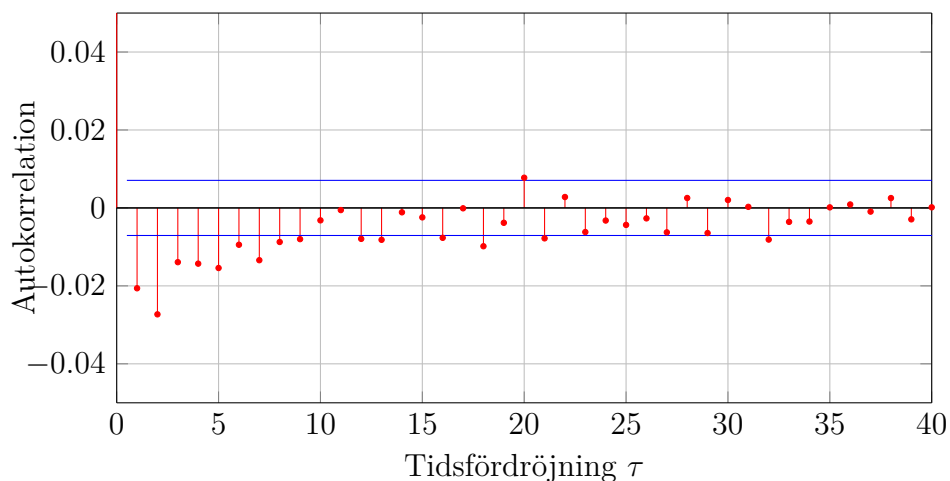
utan som x^{-2} . Dessvärre har denna fördelning inte gett oss några större framsteg när det gäller modellen för GCMG eller empirisk data och den har inte använts vidare i analysen.

6.2 Autokorrelation

För en stokastisk process y beskriver autokorrelation korrelationen mellan y_t och $y_{t+\tau}$ eller med andra ord likheten mellan observationer som en funktion av tidsfördröjningen τ däremellan. Värdemängden för autokorrelationen är $C(\tau) \in [-1, 1]$. En mer utförlig beskrivning ges i appendix A.2

En viktig kvalitativ egenskap hos empirisk finansiell data är att autokorrelationen för R^{\log} är väldigt låg samt att autokorrelationen för $|R^{\log}|$ är positiv och avtagande [6]. Då väcks frågan om modellen GCMG uppfyller dessa kvalitativa egenskaper med parametrar inom det parameterområde som angetts i avsnitten 5.6 och 5.7.

Ett exempel på hur autokorrelationen för R^{\log} kan se ut för vår modell syns i figur 6.6. Varje punkt är ett resultat av ett medelvärde för 20 simuleringar. Värdena på autokorrelation är väldigt små till belopp och en svagt negativ trend anas för små värden på τ .



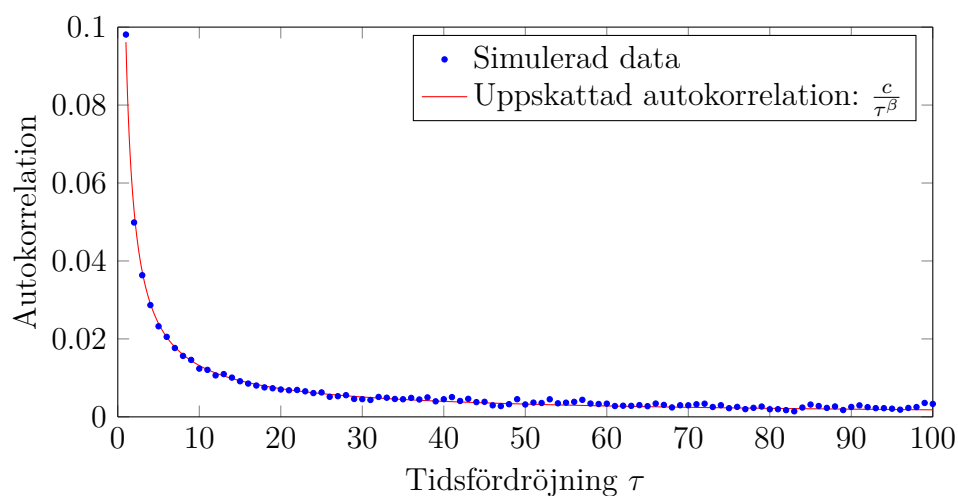
Figur 6.6: Autokorrelation för R^{\log} från GCMG med parameterrummet beskrivet i avsnitt 5.6 och 5.7 som en funktion av tidsfördröjningen τ .

I figur 6.7 visas ett exempel på autokorrelationen för $|R^{\log}|$ ur vår modell plottad mot tidsfördröjningen τ . Varje punkt är ett resultat av ett medelvärde för 20 simuleringar. Autokorrelationen är positiv och avtagande. En kurvanpassning ger att autokorrelationen för detta exempel avtar som en potensfunktion enligt

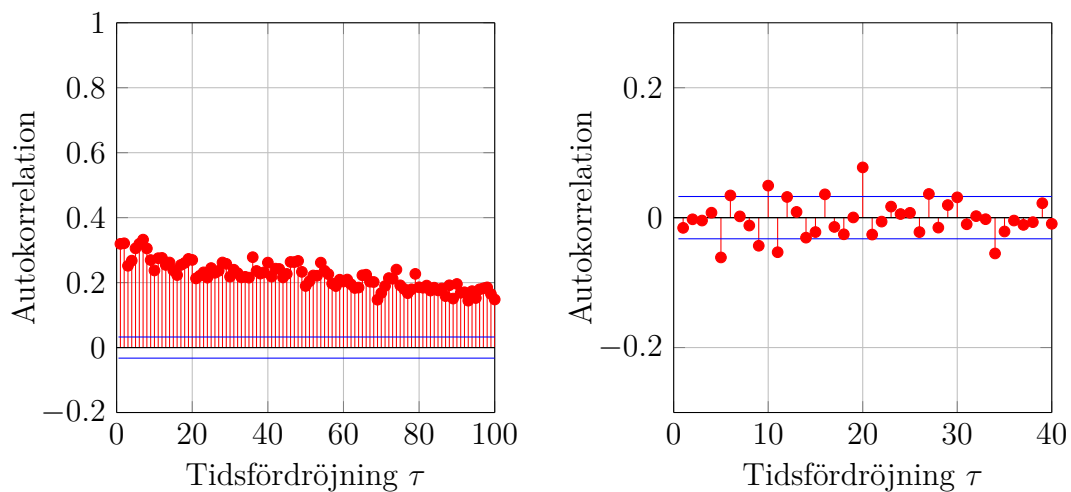
$$r_{\tau} = \frac{c}{\tau^{\beta}} \quad (6.2)$$

där c är en konstant och $\beta \approx 0.86$. Att autokorrelationen för $|R^{\log}|$ avtar som en potensfunktion är ett resultat kan uppkomma för empirisk data [6].

För att få en inblick i hur empirisk data kan se ut så visas $|R^{\log}|$ och R^{\log} för General Electric under perioden 000602-150513 i figur 6.8. Här är autokorrelationen för $|R^{\log}|$ till vänster i bilden positiv och avtagande och autokorrelationen för R^{\log} liten till belopp.



Figur 6.7: Autokorrelation för $|R^{\log}|$ från GCMG med parameterrummet beskrivet i avsnitten 5.6 och 5.7 som en funktion av tidsfördröjningen τ . En kurvanpassning visar att funktionen avtar som en potensfunktion $\frac{c}{\tau^\beta}$.



Figur 6.8: Autokorrelation för aktien General Electric $|R^{\log}|$ till vänster och R^{\log} till höger under perioden 000602-150513 som en funktion av tidsfördröjningen τ .

7 Diskussion/Slutsats

7.1 Resultatens innebörd och relevans

På det stora hela har vi uppfyllt syftet med arbetet i det att vi har konstruerat en agentbaserad modell av en aktiemarknad som inte bara uppvisar de egenskaper som diskuterades i avsnitt 1 utan vi har också i stor utsträckning lyckats förklara hur dessa makroskopiska effekter styrs av modellens mikroskopiska frihetsgrader. Under arbetets gång har fokus gradvis förskjutits mot det mer teoretiska. Från början fanns det en outtalad tanke om att arbetet i huvudsak handlade om finansfysik men på grund av modellens oväntade komplexitet har projektet inriktats mot en större förståelse av densamma.

Vi har reproducerat några av de viktigaste resultaten i det grundläggande minoritetsspelet BMG, bland annat hur volatiliteten $\frac{\sigma^2}{N}$ och förutsägbarheten H entydigt beror av parametern $\alpha = \frac{P}{N} = \frac{2^m}{N}$. Slutsatsen är att spelet kan göras minimalt volatil genom att välja en optimal fördelning av strategier. I en finansiell tolkning skulle det innebära att marknaden kan göras maximalt effektiv. Däremot finns det en möjlig diskrepans mellan våra resultat och de beskrivna i Challets originalartikel [11]. I den är det osäkert huruvida $\alpha = \alpha_c$ är det värde för vilket både volatiliteten har ett minimum och systemet får en nollskild förutsägbarhet. Våra resultat pekar på att förutsägbarheten blir nollskild redan nära det α där volatiliteten för spelet första gången blir lägre än den slumpmässiga volatiliteten, alltså väl före minimumet för volatiliteten.

Vi har lyckats reproducera flera tidigare resultat inom den storkanoniska modellen, GCMG [13]. Efter utforskning av GCMG-modellens egenskaper har vi hittat områden i parameterutrymmet där modellen uppvisar flera realistiska beteenden. Marknaden innehåller förutsägbara större aktörer, producenter, och en stor andel spekulanter som tillsammans utnyttjar denna förutsägbarhet till fullo. Inom detta parameterområde kan handelsvolymen variera kraftigt över tid och även komplexa finansiella fenomen som ”bubblor” och ”börskrascher” förekommer. Vi noterar även att dessa fenomen inträffar först efter införandet av att en spekulant endast investerar om den har en strategi som historiskt sett har gett högre avkastning än en riskfri ränta. Utöver detta så stämmer prisprocessens fördelning väl överens med empirisk data och uppvisar en pdf som är starkt centrerad kring sitt medelvärde och har tjocka svansar.

Vår upptäckt av extremhändelsers inverkan på dynamiken i avsnitt 5.8.2 är en stor framgång. Med den kunskapen kan vi nära till detaljstyra modellen utan att kompromettera dess stokastiska natur för mycket. Genom övergripande kännedom om värden i \mathbf{A}_{Prod} i form av dess extremvärden (se ekvation (5.8)) kan starka förutsägelser om marknadens dynamik göras. Här innefattas bland annat volym,

prisprocessen och även fördelning och autokorrelation av serien $\{R^{\log}(t)\}_{t=0}^T$. Det är också ett av de mest trovärdiga och stabila resultaten. Uppdelningen som sker för strategiernas poängprocesser är entydigt bestämd av dess svar på extremhändelsen ξ^* . Detta för rimliga fördelningar av strategier inom grupperna beskrivna i stycke 5.8.2, samt inom parameterområdet nämnt i samma stycke. Resultatet blir extra anmärkningsvärt då entydiga beroenden lyser med sin frånvaro i denna komplexa modell.

För finanstillämpningen betyder det som sagt att vi kan kontrollera volymens förändring över tid vilket i praktiken betyder att vi kan skapa en marknad där bubblor och krascher uppstår spontant. Dessa är tätt länkade till extremhändelserna eftersom det för alla bubblor gäller att en bubbla endast kan uppstå under tidssteg där ξ^* inte förekommer för att sedan krascha i det tidssteg när ξ^* väl sker. Detta kan förstås för $\Pi^\xi = 1$ eftersom den gruppen av strategier som potentiellt kan gå med i en bubbla entydigt definieras av att de tar samma beslut för den händelsen ξ^* . Våra simuleringar visar dock att även för $\Pi^\xi = 2$ är det gruppen som motsäger producenternas nettoinverkan för båda extremhändelserna (se stycke 5.8.2) som är med i majoriteten i bubblorna, varvid en av extremhändelserna generellt räcker för att orsaka en krasch.

Angående volatiliteten $\frac{\sigma^2}{N}$ har vi inte lyckats producera en universell parameter α för GCMG liknande den i BMG, se ekvation (4.7). Det är olyckligt då vi med en sådan parameter hade en lovande hypotes som kunde knyta ihop flera storheter och fenomen. Tolkningen av GCMG som ett BMG med ett varierande antal agenter ledde till hypotesen att ekvationen för α i BMG (ekvation (4.7)) borde modifieras till $\alpha = \frac{2^m}{N_{act}(t) + N_P}$. Det hade gett en förklaring till den tidsberoende volatilitet som observerats i modellen och dessutom hade det kopplat samman flera viktiga storheter däribland volatilitet, volym och förutsägbarhet. Tyvärr har vi inte kunnat testa hypotesen just för att vi inte har ett slutet uttryck för α i GCMG.

ε -övergången är inte heller nog utredd men till skillnad från volatiliteten tycks den inte lika angelägen. Vi har på det stora hela kunnat beskriva hur parametrarna påverkar dess längd i tidssteg. Men eftersom vi också har observerat att man genom tilldelning av en negativ startpoäng till alla strategier helt undgår en ε -fas känns problemet än mindre viktigt.

Vår modell uppvisar kända observerade egenskaper; tjocksvansade fördelningar av R^{\log} som även ska ha autokorrelation noll. Samtidigt ska autokorrelationen av $|R^{\log}|$ vara positiv och avtagande. Detaljerna för dessa egenskaper såsom potensen i avtagandet och graden av autokorrelation varierar med modellens frihetsgrader precis som utvecklingen varierar mellan olika aktier. En del konkreta försök att bestämma detaljerna har gjorts och det troligaste är att beskrivningen med extremhändelser duger väl till att förutsäga de kvalitativa egenskaperna men för exakta kvantitativa resultat spelar den stokastiska tilldelningen roll. På grund av

begränsad tillgång till empirisk data har vi använt oss av tjänsten Yahoo Finance, som dessvärre inte kompenserar för splits och endast ger data för öppnings- och stängningspriser. General Electric valdes på grund av att den inte genomgått några splits under tidsintervallet. Modellen har förvisso detaljstyrts vad gäller parameterintervall men vi har alltså inte letat efter en specifik aktie där jämförelsen stämmer. Med det sagt är inte undersökningen tillräckligt omfattande för att kunna anses representativ för all empirisk data.

På grund av projektets statistiska natur finns en osäkerhet i alla simulerade resultat. För att försöka motverka detta har vi utfört så omfattande simuleringar som möjligt med medelvärdesbildningar över flera oberoende simuleringar. Då koden kontinuerligt utvecklats kommer resultaten från olika versioner och därför kan inte fel i programmet uteslutas. Detta har försökt avhjälpas genom att till rapporten uppdatera resultaten i största möjliga mån och där det är möjligt jämföra med tidigare publicerade resultat.

7.2 Fortsatta utvecklingsmöjligheter

Den påverkan som extremvärden i producenternas nettobidrag har på strategiernas gruppering har ej hittats i tidigare verk. Grupperingarna baseras på gemensamma åsikter och det är just detta beteende som ger upphov till ”bubblor” i modellen. Då detta kan ha spännande kopplingar till verkligheten bedömer vi resultatet som mycket intressant och bör undersökas vidare.

Referenser

- [1] J. S. Cohen A. J. Cohen. Classical and neoclassical theories of general equilibrium: reviewing: Vivian walsh and harvey gram, classical and neoclassical theories of general equilibrium, historical origins and mathematical structure, new york, oxford university press, 1980, pp. xvi, 426. *Australian Economic Papers*, 22(40):180–200, 1983.
- [2] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.
- [3] John Hull. *Options, futures, and other derivatives*. Pearson Education, Harlow, Essex, 2012.
- [4] Fima C. Klebaner. *Introduction to stochastic calculus with applications*. Imperial College Press, London; Singapore, 2012.
- [5] P. Gopikrishnan, V. Plerou, L. A. Nunes Amaral, M. Meyer, and H. E. Stanley. Scaling of the distribution of fluctuations of financial market indices. *Physical review*, 60:5305–5316, November 1999.
- [6] Rama Cont. *Long range dependence in financial markets*, pages 159–179. Springer London, London, 2005.
- [7] Benoit Mandelbrot. The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419, 1963.
- [8] Rosario N. Mantegna and H. E. Stanley. *An introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*. Cambridge University Press, GB, 2004.
- [9] W. B. Arthur. Inductive reasoning and bounded rationality. *The American Economic Review*, 84(2):406–411, 1994.
- [10] D. Challet and Y. . Zhang. Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 246(3):407–418, 1997.
- [11] Damien Challet and Yi-Cheng Zhang. On the minority game: Analytical and numerical studies. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 256(3):514–532, 1998.
- [12] Robert Savit, Radu Manuca, and Rick Riolo. Adaptive competition, market efficiency, and phase transitions. *Physical Review Letters*, 82(10):2203–2206, 1999.

- [13] Y.-C. Zhang D. Challet, M. Marsili. Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games. *Physica A*, 2008.
- [14] Damien Challet and Matteo Marsili. Relevance of memory in minority games. *Physical Review E*, 62(2):1862, 2000.
- [15] Frédéric Abergel, Marco Patriarca, Ioane Toke, and Anirban Chakraborti. Econophysics review: I. empirical facts. *Quantitative Finance*, 11(7):991–1012, 2011.
- [16] Thomas Guhr. Econophysics. *Statistical physics*, 1:143, 2001.
- [17] M. B. Wilk and R. Gnanadesikan. Probability plotting methods for the analysis of data. *Biometrika*, 55(1):1–17, 1968.
- [18] Robert Rej. Nist/sematech e-handbook of statistical methods. *Clinical chemistry*, 49(6):1033, 2003.

A Utvärderingsmetoder

A.1 Quantile-Quantile Plot

QQ-plot är ett grafiskt verktyg för att jämföra olika fördelningar och introducerades 1968 av Wilk and Gnanadesikan [17]. Det kan även användas för att undersöka om ett givet dataset tillhör en viss fördelning med kummulativ fördelningsfunktion (cdf) $F(x)$. Med X_1, \dots, X_n som det *sorterade* datasetet skapas qq-plotten genom att plotta serien

$$\left\{ X_{(i)}, F^{-1}((i - 0.5)/n) \right\}_{i=1}^n.$$

Om datasetet har en fördelning ekvivalent med den specificerade med cdf $F(x)$ ska punkterna följa den räta linjen $y = x$. Om setet endast skiljer sig från fördelningen med en linjär transformation kommer punkterna också följa en rät linje, dock med en annan lutning [17]. En fördel med denna metod är att eventuella avvikelser från en rät linje speglar hur fördelningarna skiljer sig åt.

A.2 Autokorrelation

Autokorrelation används som ett mått på korrelationen mellan olika tidpunkter y_t och $y_{t+\tau}$ i en stokastisk process y med längd T . Givet en observation vid tid t hur påverkar detta en observation vid tid $t + \tau$. Under antagandet att y_t är en stationär process kan autokorrelationskoefficienten definieras enligt

$$r_\tau = \frac{E[(y_t - \mu)(y_{t+\tau} - \mu)]}{\sigma^2} \quad (\text{A.1})$$

där σ^2 är variansen och μ är medelvärdet för processen y [18]. Den empiriska autokorrelationskoefficienten beräknas då som

$$r_\tau = \frac{c_\tau}{c_0} \quad (\text{A.2})$$

där c_τ är autokovariansfunktionen enligt

$$c_\tau = \frac{1}{T - \tau} \sum_{t=1}^{T-\tau} (y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y}), \quad (\text{A.3})$$

variansfunktionen c_0 fås som

$$c_0 = \sum_{t=1}^N (y_t - \bar{y})^2 \quad (\text{A.4})$$

Värdet på autokorrelationskoefficienten varierar mellan -1 och 1, det vill säga $r_\tau \in [-1, 1]$. $r_\tau = 1$ motsvarar perfekt korrelation, $r_\tau = -1$ perfekt antikorrelation och $r_\tau = 0$ indikerar avsaknad av autokorrelation.

För att bestämma med vilken styrka som slutsatserna håller så konstrueras ett konfidensintervall $\pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{T}}$, där z är cdf:en för en standardiserad normalfördelning och α signifikansnivån [18].