Lösningsförslag till tentamen i Mekanik 2 för F, FFM521
Torsdagen 3 juni 2021
Examinator: Martin Cederwall

Lösningsförslagen innehåller inte alltid den dimensionsanalys, som i förekommande fall krävs för full poäng, och ofta inte heller figurer som bör ritas. De skall inte betraktas som modellösningar utan som en ledning om möjliga metoder.

1. Kalla det inertialsystem i vilket uppgiften är formuleras för $S$. Hundens hastighet $\vec{u}$ i $S$ och $\vec{u}'$ i $S'$ är relaterade enligt $\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}$, där $\vec{v}$ är hastigheten för $S'$ relativt $S$. Alltså, $\vec{u}' = u(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) - (u, 0) = u(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Vinkeln mot $\hat{x}'$ är $120°$. Accelerationen är 0.

2. Låt rotationen vara medurs. Normal- och friktionskrafter benämns med 1 (vänster kontaktpunkt) och 2 (höger). Kraftjämvikt och momentekvation ger

$$\begin{aligned}
\uparrow&: (N_1 + N_2)\frac{\sqrt{3}}{2} + \mu(N_2 - N_1)\frac{1}{2} - mg = 0 \ , \\
\rightarrow&: (N_1 - N_2)\frac{1}{2} + \mu(N_1 + N_2)\frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \ , \\
I\ddot{\theta} &= -\mu(N_1 + N_2)a \ ,
\end{aligned}$$

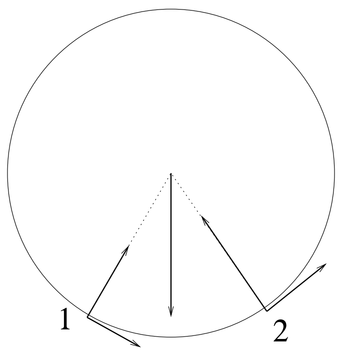
där $I = \frac{2}{5}ma^2$. Lösning av kraftekvationerna ger

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1 - \sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)} mg \ , \\
N_2 &= \frac{1 + \sqrt{3}\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)} mg \ .
\end{aligned}$$

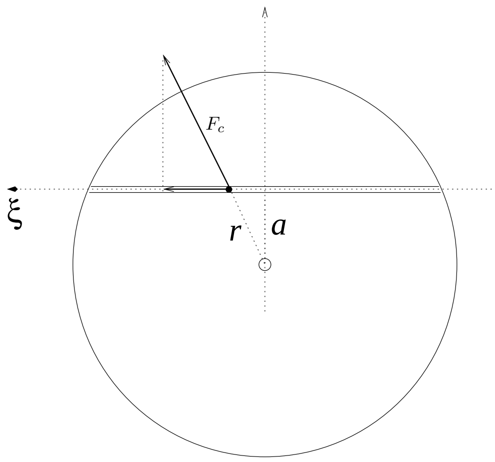
$N_1 \geq 0$ kräver $\mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. Momentekvationen blir

$$\ddot{\theta} = -\frac{5\mu}{\sqrt{3}(1 + \mu^2)} \frac{g}{a} \ .$$

Tiden från $\omega_0$ till vila är $T(\mu) = \frac{\sqrt{3}(1+\mu^2)}{5\mu}\frac{a\omega_0}{g}$. Denna funktion är monotont avtagande i det aktuella intervallet ($0 < \mu \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$). Insättning av $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ger $T = \frac{4a\omega_0}{5g}$.



3. Inför en koordinat $\xi$ längs skåran. Corioliskraften är en ren normalkraft, och påverkar inte rörelsen. Centrifugalkraften $F_c$ är ritad i figuren, och $F_c = mr\omega^2$. Kongruens ger $\frac{F_{c,\xi}}{F_c} = \frac{\xi}{r}$, så dess $\xi$-komponent är $mx\omega^2$. Rörelseekvationen blir $m\ddot{\xi} = (m\omega^2 - k)\xi$, och jämviktsläget $\xi = 0$ är stabilt om $\omega^2 < \frac{k}{m}$. Går också bra att lösa med Lagrange.




4. Koordinatsystem: $z$ uppåt, $x$ åt höger i figuren i uppgiften. Före stöten har rymdstationen rörelsemängdsmomentet $\vec{L}_{\text{ring}} = MR^2\omega\hat{z}$ och den lilla kroppen $\vec{L}_{\text{kropp}} = R\hat{x} \times (-mu\hat{z}) = muR\hat{y}$. Efter stöten är tröghetsmatrisen för den sammansatta kroppen

$$I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2 + mR^2 \end{pmatrix}$$

Rörelsemängdsmomentet är bevarat. Den sökta rotationsvektorn $\vec{\omega}'$ skall då uppfylla $I\vec{\omega}' = mvR\hat{y} + MR^2\omega\hat{z}$, vilket ger

$$\vec{\omega}' = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}\frac{v}{R}\hat{y} + \frac{M}{M+m}\omega\hat{z}\ .$$

Denna lösning har givit full poäng. Dock är den inte helt korrekt, eftersom masscentrum för den gemensamma kroppen har en translationshastighet efter stöten. Rörelsemängdmomentet m.a.p. mitten är bevarat, men får bidrag från rotation kring masscentrum och masscentrums translation.

5. Potentialen fås genom att skriva förlängningen av fjädrarna, och är

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}k(|\vec{r} - \vec{r}_i| - |\vec{r}_i|)^2 = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}k\left(\sqrt{r^2 - 2\vec{r}_i \cdot \vec{r} + r_i^2} - r_i\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}kr_i^2\left(\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2}} - 1\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2}kr_i^2\left(2 - 2\frac{\vec{r}_i \cdot r}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2} - 2\sqrt{1 - 2\frac{\vec{r}_i \cdot \vec{r}}{r_i^2} + \frac{r^2}{r_i^2}}\right)\ . \end{aligned}$$

där $\vec{r}_i$ är de tre fästpunkterna. Utveckla för små $\vec{r}$ till andra ordningen m.h.a. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$. Efter några kancellationer,

$$V(x,y) \approx \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{2} k \frac{(\vec{r}_i \cdot \vec{r})^2}{r_i^2} = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + \frac{(x+y)^2}{2}) \ .$$

(Notera rimligheten i att endast förflyttning längs linjen från fästpunkten bidrager.) Det betyder att man har en Lagrangian $L = \frac{1}{2}\dot{X}^t M \dot{X} - \frac{1}{2} X^t K X$, där $X^t = (x,y)$ och

$$M = m \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ , \quad K = k \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \ .$$

Rörelseekvationerna är $M\ddot{X} + KX = 0$. Ansatsen $X(t) = Ae^{i\omega t}$ ger den sekulära ekvationen $\det(-M\omega^2 + K) = 0$, med lösningarna $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$, $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$, med amplitudvektorerna (proportionella mot) $A_1 = (1,1)^t$ respektive $A_2(1,-1)^t$. Med tanke på systemets symmetri kring $x = y$ verkar detta rimligt. Det är också rimligt att svängningen i riktningen $A_1$ har högre frekvens än den i riktningen $A_2$, då alla tre fjädrarna deformeras.

Den allmänna lösningen är

$$X(t) = a_1 A_1 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) + a_2 A_2 \cos(\omega_2 t + \alpha_2) \ .$$