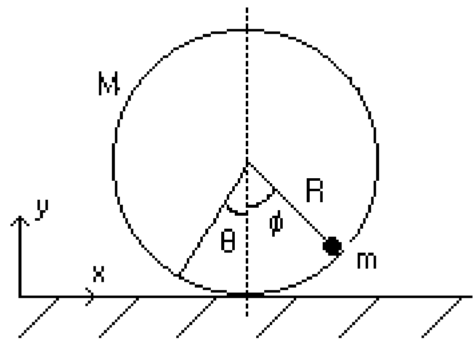
Lösningsskiss till tentamen i Mekanik F del B
13 januari 1998

1. Systemet har 2 frihetsgrader (θ och φ). Introducera hjälpkoordinaterna x och y enligt figur (rullning utan glidning $\Rightarrow x = R\theta$).



Vi får lägevektorerna

$$\begin{cases} \mathbf{r}_{\text{ring}} = x\hat{x} + R\hat{y} = R(\theta\hat{x} + \hat{y}) \\ \mathbf{r}_{\text{kloss}} = R(\theta + \sin\varphi)\hat{x} + R(1 - \cos\varphi)\hat{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\mathbf{r}}_{\text{ring}} = R\dot{\theta}\hat{x} \\ \dot{\mathbf{r}}_{\text{kloss}} = R(\dot{\theta} + \dot{\varphi}\cos\varphi)\hat{x} + R\dot{\varphi}\sin\varphi\hat{y} \end{cases}$$

Kinetisk energi:

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}M\dot{\mathbf{r}}_{\text{ring}}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}_{\text{ring}}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}_{\text{kloss}}^2 \\ &= MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2) \end{aligned}$$

Potentiell energi:

$$V = MgR + mgR(1 - \cos\varphi) = V_0 - mgR\cos\varphi$$

Lagrangefunktion:

$$L = K - V = MR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{\varphi}^2) + mgR\cos\varphi - V_0$$

Genom att sätta in detta i *Lagranges ekvationer*,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0; \quad q_i = \theta, \varphi$$

får vi nu rörelseekvationerna

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{1 + 2M/m}(\dot{\varphi}^2 \sin\varphi - \ddot{\varphi}\cos\varphi) = 0 \tag{1}$$

$$\ddot{\theta}\cos\varphi + \ddot{\varphi} + \frac{g}{R}\sin\varphi = 0 \tag{2}$$

Linearisera nu rörelseekvationerna ovan för *små svängningar* kring det stabila jämviktsläget $\theta = \varphi = 0$. De blir då

$$\ddot{\theta} - \frac{1}{1 + 2M/m}\ddot{\varphi} \approx 0 \tag{3}$$

$$\ddot{\theta} - \ddot{\varphi} - \frac{g}{R}\varphi \approx 0 \tag{4}$$

Notera att ekvation (3) endast tillåter att φ och θ har motsatta tecken, d v s att massorna rör sig åt motsatta håll, vilket bara ger en egenfrekvens. Egenfrekvensen hos den harmoniska svängningsrörelsen fås t.ex. genom att ansatsen $\varphi(t) = Ae^{\pm i\omega t}$ insättes i ekvation (3) resp. (4), vilket ger den karakteristiska ekvationen

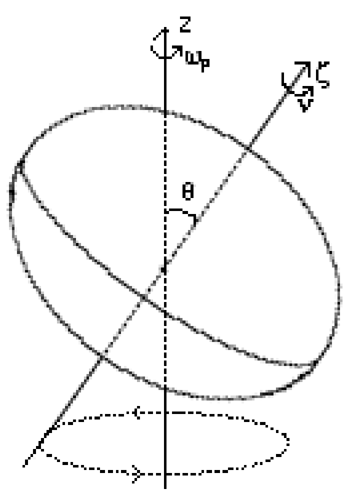
$$\omega^2 - \frac{g(1 + m/2M)}{R} = 0$$

som ger egenfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{g(1 + m/2M)}{R}}.$$

Kontroll: $M \to \infty \Rightarrow \omega \to \sqrt{g/R}$. Detta motsvarar en matematisk pendel med pendellängden R, vilket vi bör förvänta oss!

2. Rotationssymmetrisk planet utförandes reguljär precessionsrörelse (i frånvaro av yttre krafter):



Spinnhastighet ν, precessionshastighet ω_p samt vinkeln mellan spinn- och precessionsaxlarna θ är givna (konstanta). Från *impulsmomentlagen* får vi

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\mathbf{L}}}{\mathrm{dt}} = \bar{\vec{\tau}}^{\mathrm{y}} = \mathbf{0} \Rightarrow \bar{\mathbf{L}} = L_0 \hat{z} = konstant, \tag{5}$$

där $\hat{z}$ är en rumsfix axel. Vi kan också skriva rörelsemängdsmomentet kring m.c. som

$$\bar{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{I}}\vec{\omega} = I_\xi \omega_\xi \hat{\xi} + I_\eta \omega_\eta \hat{\eta} + I_\zeta \omega_\zeta \hat{\zeta}$$

eftersom det för en rotationssymmetrisk kropp gäller för deviationsmomenten att $I_{\xi\eta} = I_{\eta\zeta} = I_{\zeta\xi} = 0$. Utnyttjar vi också att planeten är rotationssymmetrisk kring ζ-axeln, så är ξ- och η-axlarna ekvivalenta, och vi kan sätta $I_\xi = I_\eta \equiv I_1$. Då kan vi skriva

$$\bar{\mathbf{L}} = I_1 \vec{\omega} + (I_\zeta - I_1)\omega_\zeta \hat{\zeta}. \tag{6}$$

Från ekvation (5) och (6) får vi

$$\vec{\omega} = \frac{L_0}{I_1}\hat{z} + (1 - \frac{I_\zeta}{I_1})\omega_\zeta \hat{\zeta} = \omega_p \hat{z} + \nu \hat{\zeta},$$

där $\omega_p = L_0/I_1$ och $\nu = (1 - I_\zeta/I_1)\omega_\zeta$. Vi kan nu härleda ett samband mellan ν, ω_p och θ genom att utnyttja att

$$\cos\theta = \hat{z} \cdot \hat{\zeta} = \frac{\bar{\mathbf{L}}}{L_0} \cdot \hat{\zeta} = \frac{I_\zeta \omega_\zeta}{L_0} = \frac{I_\zeta \nu}{I_1 \omega_p (1 - I_\zeta/I_1)}.$$

Från detta får vi slutligen sambandet

$$\boxed{\nu = \omega_p (\tfrac{I_1}{I_\zeta} - 1)\cos\theta}$$

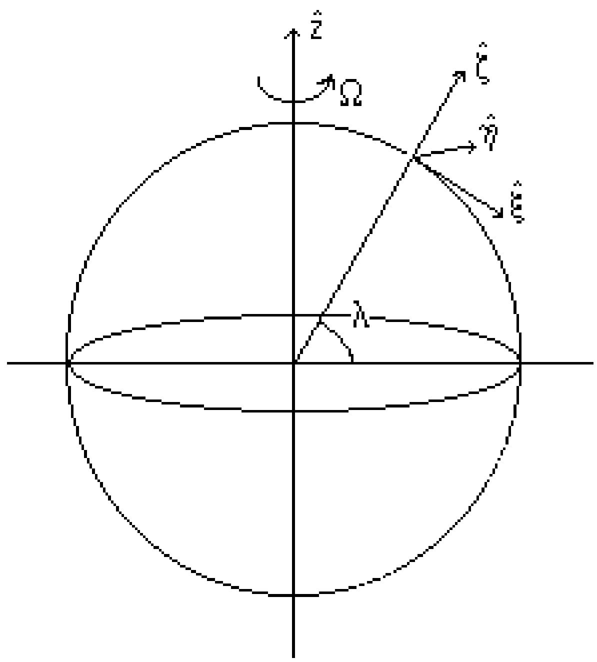
Om vi definierar

$$\Gamma \equiv \frac{I_1}{I_\zeta} - 1$$

så ser man att Γ är ett <u>mått på avvikelsen från sfärisk symmetri</u> (eftersom $I_1 = I_\zeta$ för en sfäriskt symmetrisk kropp). Vidare bestämmer tecknet på Γ om planeten är prolat eller oblat.

Om kroppen ej är rotationssymmetrisk kring en axel så kommer deviationsmomenten att vara nollskilda, vilket har till följd att precession kring en fix axel ej kan upprätthållas utan inverkan av yttre moment...

3. Jorden roterar kring $\hat{z}$-axeln med vinkelhastigheten Ω. Inför det roterande koordinatsystemet (ξ, η, ζ), som följer med i jordens rotation, med axelriktningar enligt figur ($\hat{\xi}$ söderut, $\hat{\eta}$ österut, $\hat{\zeta}$ uppåt (definierad av den effektiva gravitationskraften)).



Om massan har hastigheten $\mathbf{v}_{\rm rel} = \dot{\xi}\hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{\eta}$ i (ξ, η, ζ)-systemet, så blir corioliskraften i samma system

$$\mathbf{F}_{\rm cor} = -m\mathbf{a}_{\rm cor} = -2m\mathbf{\Omega} \times \mathbf{v}_{\rm rel} = -2m\Omega(\dot{\xi}\hat{z} \times \hat{\xi} + \dot{\eta}\hat{z} \times \hat{\eta})$$

Eftersom bidraget från centrifugalkraften till den effektiva gravitationskraften är litet, kan vi skriva

$$\hat{z} \approx \cos(90° - \lambda)\hat{\zeta} - \sin(90° - \lambda)\hat{\xi} = \sin\lambda\hat{\zeta} - \cos\lambda\hat{\xi}$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}_{\rm cor} = -2m\Omega(\dot{\xi}\sin\lambda\hat{\eta} - \dot{\eta}\sin\lambda\hat{\xi} - \dot{\eta}\cos\lambda\hat{\zeta})$$

Vi går nu över till polära koordinater (r, ϕ) genom variabelbytet

$$\begin{cases} \xi = r\cos\phi \\ \eta = r\sin\phi \end{cases}, \quad \begin{cases} \hat{\xi} = \hat{r}\cos\phi - \hat{\phi}\sin\phi \\ \hat{\eta} = \hat{r}\sin\phi + \hat{\phi}\cos\phi \end{cases}$$

och corioliskraften kan i dessa koordinater skrivas som

$$\mathbf{F}_{\rm cor} = 2m\Omega\sin\lambda(r\dot{\phi}\hat{r} - \dot{r}\hat{\phi}) + \hat{\zeta} - termer).$$

Rörelseekvationerna i polära koordinater blir därför

$$\begin{aligned} \hat{r}: &\quad m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= 2m\Omega\sin\lambda r\dot{\phi} - k(r-a) \qquad (7) \\ \hat{\phi}: &\quad m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) &= -2m\Omega\sin\lambda\dot{r} \qquad (8) \end{aligned}$$

Observera att ekvation (8) kan skrivas om m h a följande identiteter

$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})$$
$$\frac{d}{dt}(r^2) = 2\dot{r}r,$$

vilket ger

$$\frac{d}{dt}(mr^2(\dot{\phi} + \Omega\sin\lambda)) = 0.$$

Denna ekvation beskriver konservering av rörelsemängdsmomentet kring $\hat{\zeta}$-axeln, ty

$$\vec{\omega}_{tot} = \Omega\hat{z} + \dot{\phi}\hat{\zeta}$$

och därmed

$$L_\zeta = \mathbf{L}\cdot\hat{\zeta} = mr^2\vec{\omega}_{tot}\cdot\hat{\zeta} = mr^2(\Omega\sin\lambda + \dot{\phi}).$$

Vi kan skriva om den radiella rörelseekvationen i termer av en effektiv kraft enligt

$$\begin{aligned} m\ddot{r} &= mr\dot{\phi}^2 + 2mr\dot{\phi}\Omega\sin\lambda - k(r-a) \\ &= mr(\dot{\phi} + \Omega\sin\lambda)^2 - mr\Omega^2\sin^2\lambda - k(r-a) \\ &= \frac{L_\zeta^2}{mr^3} - (m\Omega^2\sin^2\lambda + k)r + ka \end{aligned} \tag{9}$$

Vi ser att $\dot{\phi} = konstant$ är en lösning till ekvation (8)) endast då

$$\dot{\phi} = -\Omega\sin\lambda,$$

vilket ger oss tiden för massan att fullborda ett varv

$$T = \frac{2\pi}{|\dot{\phi}|} = \frac{2\pi}{\Omega\sin\lambda} = \frac{24 \text{ timmar}}{\sin\lambda}{}^1.$$

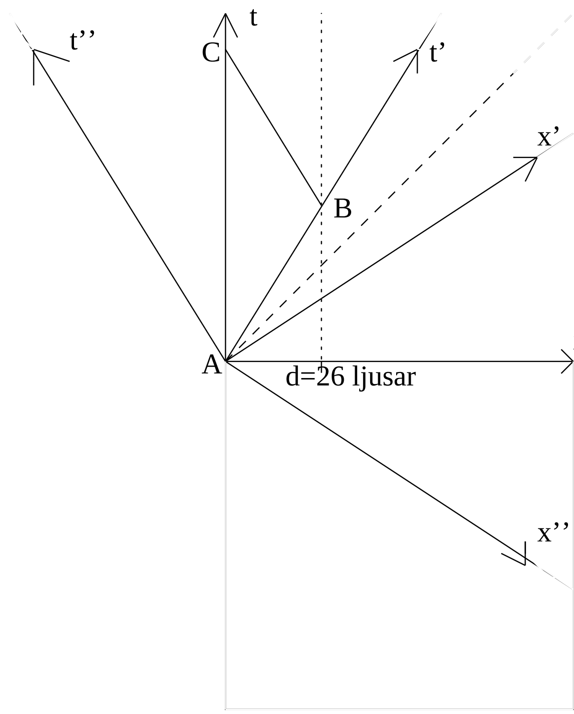
Vi ser också att $\dot{\phi} = -\Omega\sin\lambda \Rightarrow L_\zeta = 0$, vilket tillsammans med ekv. (9) ger en harmonisk oscillatorekvation

$$\ddot{r} + \gamma^2 r = \frac{k}{m}a,$$

där $\gamma \equiv \sqrt{\frac{k}{m} + \Omega^2\sin^2\lambda}$ är vinkelfrekvensen för den radiella svängningsrörelsen. I frånvaro av corioliskrafter, så är $\dot{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = konstant$ och fjädern svänger med sin naturliga frekvens fram och tillbaka kring sitt jämviktsläge.

[1] jmfr Foucaults pendel

4. I rumtidsdiagrammet nedan, utgående från jordens (approximativa) inertialsystem (oprimade storheter), är den tänkta resan illustrerad. Det primade (') systemet är Jodies vilosystem på utresan, medan det dubbelprimade (") systemet är Jodies vilosystem på återresan.



Följande händelser är markerade i diagrammet:

- **A** - Jodie startar resan från jorden
- **B** - Jodie vänder vid planeten i Vega
- **C** - Jodie är åter på jorden

Jodie upplevde att hela resan tog 18 timmar, d.v.s. $\Delta t'_{AB} + \Delta t''_{BC} = 18$ timmar. Från jorden upplevde man att resan tog ca 1/10 s, d.v.s. $\Delta t_{AC} \approx 0.1$ s. Ett sätt att övertyga sig om att denna tidsdilatation inte är möjlig inom ramen för speciell relativitetsteori är m.h.a. Lorentztransformationerna

$$\Delta t_{AB} = \gamma(v)(\Delta t'_{AB} + v\Delta x'_{AB}/c^2) = \gamma(v)\Delta t'_{AB},$$

eftersom Jodie är närvarande vid både A och B, och därmed är $\Delta x'_{AB} = 0$. P.s.s. fås vid återresan att

$$\Delta t_{BC} = \gamma(v)(\Delta t''_{BC} + v\Delta x''_{BC}/c^2) = \gamma(v)\Delta t''_{BC}.$$

Jodie mäter alltså tiden

$$\Delta t'_{AB} + \Delta t''_{BC} = \frac{1}{\gamma(v)}(\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC}) \leq \Delta t_{AC}$$

Alltså måste Jodie uppleva att hon färdas under en kortare tid än vad man mäter på jorden, vilket innebär att den i uppgiften angivna tidsdilatationen inte kan vara möjlig.
Dessutom är det faktum att resan skulle ta 0.1 s sett från jorden omöjligt (i vårt platta minkowskirum) eftersom avståndet $d = 26$ ljusår i sådana fall skulle kräva att $v >> c$.