

Tentamen i Termodynamik och Statistisk Fysik II (GU)

Lördagen den 14:e mars 1998, kl. 8.45 - 13.45 i sal ML6.

Examinator: Henrik Johannesson, ankn. 3185.

Hjälpmedel: Kalkylator, Physics Handbook, TEFYMA, valfri matematisk tabellsamling.

För godkänd/väl godkänd tentamen krävs 7/11 poäng (inkl. bonuspoäng). Varje uppgift ger maximalt 3 poäng. Uppgifterna är inte avsiktligt ordnade efter svårighetsgrad. Lösningarna anslås på entrédörren till Fysicum omedelbart efter skrivningens slut. Kursresultat meddelas individuellt via e-mail. Officiell resultatlista anslås också i trapphuset senast två veckor efter tentamen.

Strukturerar Dina lösningar noggrant! Alla antaganden och väsentliga steg i beräkningarna skall motiveras!

1. Diatomär moleky: rotationsenergi

Rotationsenergin hos en diatomär moleky har kvantmekaniska nivåer

$$\epsilon_j = k\Theta_{rot}j(j+1), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

där Θ_{rot} är en konstant som beror på molekylens egenskaper ($k = \text{Boltzmanns konstant}$). Energivån ϵ_j har degenerationen $2j+1$. För kolmonoxid CO gäller att $\Theta_{rot} = 2.77\text{K}$. Bestäm den mest sannolika rotationsenergin för en CO-moleky vid temperaturen 10K respektive 300K.

2. Entropi

a) Ge en noggrann definition av begreppet *entropi* och förklara varför spontana processer i ett termiskt isolerat system alltid tenderar att öka entropin. Är det korrekt att här ersätta "...tenderar att öka entropin" med "...ökar entropin"? Utred!

b) Partitionsfunktionen för en *klassisk ideal gas* av N identiska partiklar med massa m kan skrivas som

$$Z = \left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \frac{1}{N!} \quad (2)$$

där V är volymen, N partikelantalet, och $\lambda = \sqrt{h^2/2\pi mkT}$ den termiska våglängden. Visa att partitionsfunktionen i (2) ger entropin

$$S = Nk(\ln V - \ln N + \frac{3}{2}\ln T + \text{konst.}) \quad (3)$$

där konstanten är oberoende av N, V och T .

c) Utrycket för entropin i (3) beter sig underligt i gränsen $T \rightarrow 0$. Utred varför!

3. Adiabatisk demagnetisering

Betrakta ett gitter av N identiska, icke-växlerverkande magnetiska joner med spinn $S = 1/2$, magnetiskt moment μ , och med ett pålagt yttre magnetfält $\mathbf{H}$. Magnetfältet har styrkan 10T vilket ger ett magnetiskt bidrag $\epsilon_{\pm} = \mp 10\mu$ till energin för en jon (där tecknet beror på om spinnen pekar parallellt (+) eller antiparallellt (-) med fältet). Spinnen är från början i termisk jämvikt med sin omgivning vid temperaturen $T = 1\text{K}$. Genom att isolera systemet termiskt och reducera magnetfältet adiabatiskt (så att entropin förblir konstant under processen) kan systemet kylas ytterligare. (Proceduren kallas *kylning genom adiabatisk demagnetisering* och är en standardmetod inom experimentell lågtemperaturfysik.) Antag att magnetfältet reduceras adiabatiskt till 10^{-2}T . Vilken blir spinnsystemets sluttemperatur?

Ledning: Undersök hur entropin beror på temperatur och magnetfält! Du kan här helt försumma det lilla bidraget till entropin från gittervibrationerna och endast betrakta spinnens bidrag (*magnetisk entropi*).

4. 2D elektrongas

Inom den kondenserade materiens fysik har man under senare tid blivit alltmer intresserad av lågdimensionella system. Ett exempel är elektroner på en yta av flytande helium ($T < 4.2\text{K}$). Dessa uppför sig med god approximation som en tvådimensionell gas av icke-växlerverkande identiska fermioner. Ett typiskt värde på tätheten är 10^{11} elektroner/ m^2 . Bestäm fermienergin för en sådan elektrongas, och diskutera huruvida elektroner på en yta av flytande helium nära kokpunkten beter sig som en degenererad elektrongas ($T_F \gg 4.2\text{K}$) eller som en klassisk ideal gas.

5. Exotisk kvantstatistik

All experimentell evidens pekar på att en tredimensionell gas av identiska fria partiklar beskrivs antingen av Bose-Einstein statistik *eller* Fermi-Dirac statistik.¹ Men låt oss betrakta en hypotetisk situation där ett antal fria partiklar i tre dimensioner med spinn noll kan inta skilda kvanttillstånd med energierna $\epsilon_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ ($\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ = partikelns impuls) och där varje sådant kvanttillstånd kan besättas av *högst två* partiklar.

a) I en storkanonisk ensemble (där vi låter partikelantalet fluktuera) kommer varje 1-partikel-tillstånd för systemet att ge ett bidrag

$$\Xi_{\mathbf{k}} = 1 + \exp(-\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)) + \exp(-2\beta(\epsilon_{\mathbf{k}} - \mu)) \quad (4)$$

till den storkanoniska partitionsfunktionen Ξ . Motivera (4)!

b) Använd (4) till att bestämma hur medelantalet partiklar i de olika tillstånden beror på temperaturen vid jämvikt. Vad blir medelenergin och den kemiska potentialen vid absoluta nollpunkten uttryckt i partikeltätheten?

¹Villkoret på dimensionalitet är viktigt: vissa system i en eller två dimensioner beskrivs av s. k. *fraktionell statistik*. Med antagandet att BE och FD statistik är de enda möjligheterna i tre dimensioner gäller det berömda *spinn-statistik teoremet* (Pauli, 1940): "Partiklar med hel/halvtaligt spinn beskrivs av BE/FD statistik".

1. $T = 10 K : j = 1; T = 300 K : j = 7$
2. Se föreläsningssanteckningarna! c) $S \rightarrow -\infty$ då $T \rightarrow 0$ är en artefakt av att vi använder en klassisk formulering vid låga temperaturer.
3. $T_f = 10^{-3} K$.
4. $T_F \ll 4.2 K \rightarrow$ klassisk beskrivning OK.
5. a) $\Xi_{\mathbf{k}}$ definierar den storkanoniska partitionsfunktionen för ett system med två partiklar och *ett* kvanttillstånd med impuls $\mathbf{k}$. $\langle E \rangle = N \frac{3\hbar^2}{10m} (3\pi^2 n)^{2/3}$, $\mu = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{2/3}$.