

Inlämningsuppgifter 2

Symmetrier i fysiken FYP380, lp 4 2018

Deadline: Tisdagen 17 april (lämnas kl 10:00, F7103)

Strukturerar Dina lösningar noggrant, gärna med en översiktlig skiss av tankegång och bärande element! **Uppställda samband skall motiveras.** Alla väsentliga steg i analys och beräkningar skall redovisas.

Du får gärna arbeta tillsammans med Din kurskamrater, men de lösningar som Du lämnar in måste Du ta ansvar för själv! Efter kursens slut kan Du komma att kallas till ett individuellt eftersamtal där Du får redogöra för hur Du löst några av inlämningsuppgifterna.

1. Inledande gruppteori (12p)

- a) Bestäm ordningen för den delgrupp till S_4 som fixerar (i) 1, (ii) 1 och 2, (iii) $\{1,2\}$.
- b) Bestäm fyra olika delgrupper till S_4 som är isomorfa med S_3 och nio som är isomorfa med S_2 .
- c) Visa att D_4 , *diedergruppen* av ordning 8, uppfyller gruppaxiomen.
- d) Visa att om H är en delgrupp till en abelsk grupp G , så är $aH = Ha$ för varje $a \in G$.
- e) Bestäm gfg^{-1} och fgf^{-1} om $f = (1\ 3) \in S_3$ och $g = (1\ 2\ 3) \in S_3$.
- f) Låt $f, g \in S_4$. Visa att om $f = (1\ 2\ 3\ 4)$, så är $gfg^{-1} = (g(1)\ g(2)\ g(3)\ g(4))$.
- g) Betrakta en mängd G med fyra element e, a, b, c , med en kompositionsregel ("multiplikation") $ee = e, ea = a, eb = b, ec = c, ae = a, aa = e, be = b, ce = c$. På hur många sätt kan Du fullborda multiplikationstabellen så att G bildar en grupp?
- h) Visa att om varje element x i en grupp G satisfierar $x^2 = e$, där e är enhetselementet, så är G abelsk.
- i) Betrakta det euklidiska planet R^2 med ett fixt ortonormerat koordinatsystem Oxy . Låt H bestå av fyra avbildningar: e = identitetsavbildningen, a = spegling i x -axeln, b = spegling i y -axeln, c = spegling i origo. Denna grupp (eller en isomorf grupp) kallas *Kleins fyragrupp*. Konstruera multiplikationstabellen för H (sammansättning av avbildningar) och bestäm dess delgrupper.
- j) Illustrera beviset för Cayleys sats med Kleins fyragrupp genom att visa att den är isomorf med den delgrupp till S_4 som består av permutationerna $()$, $(1\ 2)(3\ 4)$, $(1\ 3)(2\ 4)$, $(1\ 4)(2\ 3)$.
- k) *Ordningen* av ett element g i en grupp är det minsta heltalet n sådant att $g^n = e$, där e är enhetselementet. Vilka ordningar har elementen i Diedergruppen D_3 ?
- l) Låt G vara en grupp av ordning 5. Visa att G är Abelsk.

2. Unitära transformationer, reducerbarhet, och allt det där... (4p)

För att visa Maschkes teorem – *Alla reducerbara representationer av en ändlig grupp är fullständigt reducerbara* – så använder Jones att alla unitära representationer är fullständigt reducerbara, ett resultat som han visar på sid 55. En studiekamrat till Dig säger sig inte förstå Jones resonemang. Kan Du hjälpa honom eller henne?

3. Fundamentala ortogonalitetsteoremet (3p)

Betrakta tre-element gruppen $G = \{e, a, b\}$ med en representation D där

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D(a) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}, \quad D(b) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}.$$

Uppfyller D det fundamentala ortogonalitetsteoremet? Förklara Ditt svar!

4. Penrose stenläggning och kvasikristaller (5p)

Skriv en miniuppsats (max 3 A4-sidor!) om att "lägga golv" med hjälp av Penrose! Tänk att Du skriver för någon som kan betydligt mindre matematik och fysik än Du själv, t.ex. en gymnasist. Gör det så lättfattligt som möjligt! För full poäng på uppgiften vill jag att Du speciellt förklarar begreppen "femfaldig symmetri" och "kvasiperiodicitet", och att Du också säger något om den fysikaliska relevansen (kvasikristaller!) av Penrose upptäckt. Du hittar det mesta Du behöver i avsnittet *Tiling Patterns* från Ian Stewarts bok (se länk, veckoplanen på kurshemsidan). Eventuellt vill Du komplettera med Martin Gardners *Mathematical Games* från Scientific American, Januari 1977, och kanske också med något om kvasikristaller.