Vektorfält och klassisk fysik för F2
Problemlösningskompendium
Läsperiod I, 2007

Ulf Torkelsson,
Institutionen för fysik
Göteborgs universitet

September 3, 2007

Innehållsförteckning

Kapitel 1

Fält och hur man visualiserar dem

Ett fält kan man se som en kontinuerlig funktion, typiskt någon form av fysikalisk storhet, av rumskoordinaterna och tiden. I den här kursen skall vi behandla två typer av fält, skalära fält och vektorfält. Vanliga exempel på skalära fält är tryck och temperatur, det vill säga storheter som i varje punkt karakteriseras av ett vanligt tal. Ett vektorfält å andra sidan utgörs i varje punkt av en vektor, det vill säga den fysikaliska variabeln har både en storlek och en riktning. Exempel på sådana fält kan vara vindhastigheten eller den elektriska fältstyrkan i en punkt.

För att förstå variationerna i ett fält är det ofta viktigt att skapa en grafisk representation av ett fält. Denna representation kommer att skilja sig åt beroende av om det är ett skalärt fält eller ett vektorfält.

1.1 Skalära fält

Det enklaste sättet att skapa en bild av ett skalärt fält är att rita upp **nivåkurvor** eller **nivåytor** för fältet, det vill säga kurvor längs vilka fältet har ett konstant värde. Sådana kurvor ser vi ofta på väderkartorna, till exempel som isobarer, kurvor längs vilka lufttrycket är konstant. Om vi har ett skalärt fält $f(x, y, z)$, så måste vi alltså lösa ekvationen $f(x, y, z) = C$ för olika värden på C, och plotta de resulterande kurvorna.

Exempel: Betrakta fältet

$$f = \frac{1}{r}, \text{ där } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1.1}$$

Detta fält har nivåytor

$$\frac{1}{r} = C \Longleftrightarrow r = \frac{1}{C}, \tag{1.2}$$

vilka vi ser är sfärer med radien $1/C$. Dessa kan vi lätt rita upp med ett matematikprogram som Matlab eller Mathematica.

Det är ofta svårt att rita tredimensionella ytor för hand, och då kan man istället välja att hålla en koordinat fix. Låt oss säga att vi sätter $z = 0$. Nivåytorna övergår då till att bli nivåkurvor, som i det här fallet blir cirklar med radien $1/C$.

Det är praktiskt att kunna känna igen ekvationerna för de vanligaste typerna av kurvor och ytor:

$$ax + by = c. \tag{1.3}$$

En rät linje i xy-planet med tangentvektorn $\mathbf{n} = (b, -a)/\sqrt{a^2 + b^2}$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{1.4}$$

En ellips med medelpunkt i (x_0, y_0) och halvaxlar a och b. För $a^2 > b^2$ ligger brännpunkterna i $(x_0 \pm c, y_0)$, där $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, och för $b^2 > a^2$ ligger brännpunkterna i $(x_0, y_0 \pm c)$ med $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1. \tag{1.5}$$

Hyperbel med medelpunkten i (x_0, y_0) och halvaxlar a och b. Halva avståndet mellan brännpunkterna är $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Tecknet i högerledet bestämmer hyperbelns orientering.

Gränsfallet mellan ellipsen och hyperbeln är en parabel med apex i punkten (x_0, y_0). Beroende på parabelns orientering finns det fyra fall:

$$(x - x_0)^2 = \pm 2d\,(y - y_0) \tag{1.6}$$

eller

$$(y - y_0)^2 = \pm 2d\,(x - x_0)\,. \tag{1.7}$$

$$ax + by + cz = d. \tag{1.8}$$

Ett plan med normalvektorn $\mathbf{n} = (a, b, c)/\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} + \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = 1. \tag{1.9}$$

Ellipsoid med centrum i (x_0, y_0, z_0) och halvaxlar a, b och c. Om $a = b$ så kallar man den för en sfäroid. Sfäroiden är oblat om $c < a$ och prolat om $c > a$.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(z - z_0)^2}{c^2} = \pm 1. \tag{1.10}$$

Hyperboloid, som är öppen i z-led, med medelpunkten i (x_0, y_0, z_0) och halvaxlar a, b och c. Med positivt tecken i högerledet har vi en enmantlad hyperboloid (lösning existerar för alla z). Med ett negativt högerled existerar lösningar endast för

$$\frac{(z - z_0)^2}{c^2} > 1, \tag{1.11}$$

och vi får en tvåmantlad hyperboloid.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm (z - z_0)\,. \tag{1.12}$$

Paraboloid med apex i (x_0, y_0, z_0) och öppen i z-led.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} - (z - z_0)^2 = 0. \tag{1.13}$$

Elliptisk dubbelkon med spetsen i (x_0, y_0, z_0) och öppen i z-led.

Med modern datorgrafik kan man också använda mer avancerade tekniker som att färgkoda fältet, det vill säga varje punkt xy-planet får färg efter fs värde i den punkten. Denna teknik fungerar dock betydligt sämre i tre dimensioner. En annan möjlighet är att använda fs värde för att skapa en tredimensionell yta. Man låter helt enkelt värdet på f blir ytans höjd över xy-planet. Vi studerar detta mer ingående i den första datorlaborationen.

Övningsuppgifter

1. Beskriv nivåytorna till
$$f(x, y, z) = 4x + 3y - 12z + 8$$

2. Beskriv nivåytorna till
$$f(x, y, z) = x^2 + 4x + y^2 + 3$$

3. Beskriv ytan $|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}| = y$.

4. Det skalära fältet ϕ är givet i cylindriska koordinater

$$\phi(\rho, \varphi, z) = \rho^2 - 2\rho\cos\varphi - z^2.$$

   Beskriv dess nivåytor.

5. Det skalära fältet ϕ är givet i sfäriska koordinater

$$\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin^2\theta \cos 2\varphi.$$

   Beskriv dess nivåytor.

6. Det skalära fältet ϕ är givet

$$\phi(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}{x^2 + 4y^2}.$$

   Beskriv kortfattat de möjliga formerna på dess nivåytor.

1.2 Vektorfält

Låt oss som ett exempel på ett vektorfält betrakta hastighetsfältet i en fluid $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Om vi nu betraktar en partikel som vi vid tidpunkten t_0 släpper i punkten $\mathbf{r}_0$, och som därefter följer strömningen i fluiden så kan vi beskriva dess position med differentialekvationen

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v}\left[\mathbf{r}(t)\right], \tag{1.14}$$

och begynnelsevillkoret $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$. Den partikelbana man får fram genom att lösa ekvationen (1.14) är en fältlinje till fältet $\mathbf{v}$.

För ett godtyckligt vektorfält, $\mathbf{F}$, kan vi låtsas att det är ett hastighetsfält. Vi multiplicerar då först fältet med en konstant, C, så att det får rätt enhet, det vill säga vi sätter $\mathbf{v} = C\mathbf{F}$. I praktiken så väljer vi C så att resten av räkningarna blir så enkla som möjligt. Strängt taget har vi inte längre en riktig tid t, men vi inför en parameter τ för att numrera punkterna längs fältlinjen. Ekvationen för fältlinjen blir nu

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\mathbf{F}\left[\mathbf{r}(\tau)\right]. \tag{1.15}$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i cylinderkoordinater

$$\mathbf{F}(\rho, \alpha, z) = F_0\left(\frac{\rho}{a}\hat{\alpha} + \hat{\mathbf{z}}\right). \tag{1.16}$$

Bestäm dess fältlinjer.

Lösning: Vi börjar med att skriva om $\rho\hat{\alpha} = -y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}$. I kartesiska koordinater kan vi sedan skriva ekvationen för fältlinjen som

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -C\frac{F_0}{a}y(\tau) \tag{1.17}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = C\frac{F_0}{a}x(\tau) \tag{1.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = CF_0 \tag{1.19}$$

Vi väljer nu $C = a/F_0$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -y(\tau) \tag{1.20}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = x(\tau) \tag{1.21}$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = a \tag{1.22}$$

Notera nu att om vi deriverar de två första ekvationerna så får vi

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = -\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = -x(\tau) \tag{1.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = -y(\tau) \tag{1.24}$$

Lösningen till ekvationssystemet blir nu

$$x(\tau) = \rho_0 \cos(\tau - \tau_0) \tag{1.25}$$

$$y(\tau) = \rho_0 \sin(\tau - \tau_0) \tag{1.26}$$

$$z = z_0 + a(\tau - \tau_0) \tag{1.27}$$

Lägg märke till att definitionen av de cylindriska koordinaterna leder oss till att välja cos i uttrycket för x och sin i uttrycket för y. I princip kan vi göra tvärtom, men då får vi ett annat värde på τ_0. Däremot kan vi inte välja antingen sin eller cos i båda uttrycken.

Exempel: Ett tvådimensionellt vektorfält ges av

$$\mathbf{F} = F_0\left(-1 + \frac{y^2}{x^2}, -2\frac{y}{x}\right). \tag{1.28}$$

Bestäm dess fältlinjer.

Lösning: Ekvationen för fältlinjer ger

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = CF_0\left(-1 + \frac{y^2}{x^2}\right) \tag{1.29}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = -2CF_0\frac{y}{x}. \tag{1.30}$$

Vi kan nu dividera ekvationerna med varandra

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-2\frac{y}{x}}{-1 + \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \tag{1.31}$$

Vi kan skriva om ekvationen som

$$\left(x^2 - y^2\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2xy. \tag{1.32}$$

Om vi nu samlar alla termerna på den ena sidan likhetstecknet och dividerar med y^2 så får vi

$$0 = 2\frac{x}{y} + \left(1 - \frac{x^2}{y^2}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}. \tag{1.33}$$

Högerledet är nu detsamma som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{y} + y\right). \tag{1.34}$$

Alltså kan vi skriva ekvationerna för fältlinjerna som

$$\frac{x^2}{y} + y = 2D. \tag{1.35}$$

Efter multiplikation med y får vi ekvationen

$$x^2 + y^2 = 2Dy, \tag{1.36}$$

som efter kvadratkomplettering blir

$$x^2 + (y - D)^2 = D^2. \tag{1.37}$$

Fältlinjerna är alltså cirklar med centrum i $(0, D)$ och med radien D.

Övningsuppgifter

1. Vektorfältet
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0 \left(\frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}} \right)$$
är givet. Bestäm dess fältlinjer.

2. Betrakta vektorfältet
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{m}{4\pi r^3} \left(2\cos\theta \hat{\mathbf{r}} + \sin\theta \hat{\theta} \right),$$
där m är en konstant. Bestäm ekvationen för den fältlinje till $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ som går genom punkten $(r, \theta, \varphi) = (2, \pi/4, \pi/6)$. (Detta är fältet från en elektrisk dipol.)

3. Ett vektorfält $\mathbf{A}$ är givet i cylinderkoordinater som
$$\mathbf{A} = \rho\cos\alpha\hat{\rho} + \rho^2\hat{\alpha} + \rho\sin\alpha\hat{\mathbf{z}}.$$
Härled ekvationerna för fältlinjerna till $\mathbf{A}$. Betrakta fältlinjen som går genom punkten $\rho = 3, \alpha = \pi/2, z = 2$. I vilka punkter går denna fältlinje genom planet $y = 0$?

   (Dugga 990922)

1.3 Potentialer och gradienter

Gradienten ∇ är en operator som från ett skalärfält Φ skapar ett vektorfält

$$\mathbf{F} = \nabla\Phi = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right). \tag{1.38}$$

Man säger ofta att Φ är potentialen till fältet $\mathbf{F}$. En viktig egenskap för gradienten är att den är en vektor som i varje punkt är en normal till nivåytan för Φ. Ett typiskt exempel på ett vektorfält med en potential är den elektriska fältstyrkan $\mathbf{E}$, till vilken vi kan hitta en elektrisk potential Φ. Det gäller dock inte att alla vektorfält har en skalär potential. Till exempel har magnetfältet $\mathbf{B}$ i allmänhet inte en skalär potential.

Man kan skapa en samtidig bild av ett vektorfält $\mathbf{F}$ och dess potential Φ genom att plotta både nivåytorna till Φ och fältlinjerna till $\mathbf{F}$. En sådan grafisk representation kallar vi för en fältbild. Lägg märke till att i en sådan bild kommer nivåytor och fältlinjer alltid att skära varandra under räta vinklar.

Exempel: S är den stympade konen $x^2+y^2-2(z-a)^2 = a^2,\ 0 < z < a$. Bestäm en enhetsnormal till S i punkten $\mathbf{r} = (a, a/\sqrt{2}, a/2)$.

Lösning: Vi inför funktionen $\phi = x^2 + y^2 - 2(z-a)^2$. S är en del av en nivåyta till ϕ. En nivåyta har en normal

$$\nabla\phi = (2x, 2y, -4(z-a)). \tag{1.39}$$

Vi normerar den här normalen

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{(x, y, -2(z-a))}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4(z-a)^2}}. \tag{1.40}$$

I punkten $\mathbf{r}$ blir normalen

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{2}, 1, \sqrt{2} \right). \tag{1.41}$$

Exempel: Det skalära fältet

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \frac{xyz}{a^3} \tag{1.42}$$

är givet. Bestäm vektorfältet $\nabla\phi(\mathbf{r})$. Beräkna även riktningsderivatan av ϕ i den riktning som ges av vektorn $\mathbf{v} = (2, 3, 5)$.

Lösning: Vi beräknar först gradienten

$$\nabla\phi = \frac{\phi_0}{a^3} (yz, xz, xy). \tag{1.43}$$

För att beräkna riktningsderivatan behöver vi normalisera vektorn $\mathbf{v}$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{38}} (2, 3, 5). \tag{1.44}$$

Riktningsderivatan ges nu av skalärprodukten av $\hat{\mathbf{v}}$ och $\nabla\phi$

$$\hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla\phi = \frac{1}{\sqrt{38}} (2, 3, 5) \cdot \frac{\phi_0}{a^3} (yz, xz, xy) = \frac{\phi_0}{\sqrt{38}a^3} (2yz + 3xz + 5xy). \tag{1.45}$$

Övningsuppgifter

1. Beräkna en enhetsnormal till ytan $x^2yz = -2$ i punkten $(1, 2, -1)$

2. Det skalära fältet

   $$\phi(\mathbf{r}) = x^2 + 4y^2 + 9z^2,$$

   och ytan S

   $$S: \quad 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36a^2,$$

   är givna. Beräkna i punkten $(\sqrt{2}a, \sqrt{3}a, \sqrt{6}a)$ riktningsderivatan av ϕ i normalriktningen till ytan S.

3. Det skalära fältet

   $$\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos\theta,$$

   och ytan S

   $$r \sin\theta = a$$

   är givna i sfäriska koordinater. Beräkna i punkten $\mathbf{r} = (0, a, a)$ på S riktningsderivatan av ϕ i ytans normalriktning i punkten.

4. Beskriv nivåytorna till fältet

   $$\phi(r, \theta, \varphi) = r^2 \cos 2\theta - 2ar \sin\theta \cos\varphi,$$

   där r, θ, φ är sfäriska koordinater. Beräkna därefter riktningsderivatan av ϕ i riktningen $\hat{\theta}$ i punkten $P: \ r = a, \ \theta = \pi/4, \ \varphi = \pi$. Beskriv också fältlinjerna till $\nabla\phi$.

5. Inom ett bergsmassiv beskrivs den lokala nivån $h(x, y)$ över havsytan av funktionen

   $$h(x, y) = \frac{k}{(x/a)^2 + (y/\sqrt{2}a)^2 + 1}, \tag{1.46}$$

   där a och k är konstanter, och där koordinatsystemet valts så att $\hat{\mathbf{x}} -$ $(\hat{\mathbf{y}}-)$ axeln liger i väst-östlig (syd-nordlig) riktning.

a. Skissera nivå-linjerna.

b. Bergsmassivet är brantast i områden väster och öster om toppen. Bestäm stigningen och höjden över havet i den brantaste punkten, givet informationen att $a = 1$m och att massivets topp ligger på 1000 m.ö.h.

(980817)

6. Temperaturen i ett rum beskrivs av skalärfältet

$$T = T_0(x^2 + 2yz - z^2) \quad [^\circ\mathrm{C}]$$

där $T_0 = 1^\circ\mathrm{C/m}^2$. En frusen fluga befinner sig i punkten $(1, 1, 2)$.
a) I vilken riktning skall flugan flyga om den vill bli varm så fort som möjligt?
b) Hur snabbt (uttryckt i $^\circ$C/s) ökar temperaturen om flugan flyger med hastigheten 0.3 m/s i riktningen (-2, 2, 1)?

(981005)

7. Temperaturen i ett stycke uppvärmt keramiskt material anges av skalärfältet

$$T(\mathbf{r}) = x^2 + y^2 + z^2 + xy + 2yz \ [^\circ].$$

Betrakta temperaturvariationerna i olika riktningar från punkten $P_0 : (1, 2, -3)$ och visa att alla riktningar i vilka temperaturen minskar med 2°C/längdenhet bildar samma vinkel α med den riktning $\mathbf{n}$ i vilken temperaturen växer snabbast. Bestäm α och $\mathbf{n}$.

(000814)

8. Skalärfältet

$$f(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + 2z^2 - 2y$$

är givet. Använd gradientens egenskaper för att approximativt beräkna det vinkelräta avståndet från punkten $(1, 2, -1)$ på nivåytan $f = 1,000000$ till nivåytan $f = 1,000003$

(990816)

Kapitel 2

Kurv- och ytintegraler av fält

Vi skall i det här kapitlet se hur vi kan integrera ett fält längs en kurva eller över en yta. Det mest direkta sättet att göra detta på inbegriper att vi parametriserar kurvan eller ytan. Vi kan sedan i varje punkt beskriva kurvan eller ytan med hjälp av en vektor.

2.1 Parametrisering av kurvor och ytor

När vi tidigare studerade fältlinjer såg vi hur vi kan beskriva fältlinjen med en parameter, låt oss säga τ. Det gäller rent allmänt att vi kan beskriva varje kontinuerlig kurva med hjälp av en parameter.

Exempel: En cirkel i xy-planet med radien r_0 kan parametriseras med vinkel φ:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r_0 \cos\varphi \\ y & = & r_0 \sin\varphi \end{array} \right. \tag{2.1}$$

där $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Exempel: Parametrisera linjen $5x + 2y = 4$.
Lösning: Vi kan börja med att sätta $x = t$. Det följer då att

$$y = 2 - \frac{5}{2}t. \tag{2.2}$$

Dessa både uttryck ger en parametrisering av linjen för $-\infty < t < \infty$.

En viktig egenskap hos kurvan $\mathbf{r}(\tau)$ är att derivatan $\mathbf{r}'(\tau)$ i varje punkt ger en tangentvektor till kurvan.

Exempel: Cirkeln $\mathbf{r}(\varphi) = r_0(\cos\varphi, \sin\varphi)$ har tangentvektorn $\mathbf{r}'(\varphi) = r_0(-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Exempel: Linjen $\mathbf{r}(t) = (t, 2 - 5t/2)$ har tangentvektorn $\mathbf{r}'(t) = (1, -5/2)$.

För att beskriva en två-dimensionell yta behöver man på samma sätt två parametrar.

Exempel: En sfär med radien r_0 och centrum i origo kan skrivas som:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r_0 \sin\theta\cos\varphi \\ y & = & r_0 \sin\theta\sin\varphi \\ z & = & r_0 \cos\theta \end{array} \right. \tag{2.3}$$

där $0 \leq \theta < \pi$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Exempel: Finn en parametrisering av planet $x + 2y + z = 8$.
Lösning: Vi sätter $x = s$ och $y = t$. Vi kan då skriva

$$z = 8 - s - 2t, \tag{2.4}$$

och vi har funnit en parametrisering av ytan för $-\infty < s, t < \infty$.

För en yta $\mathbf{r}(s, t)$ kan vi nu finna två tangentvektorer

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s}, \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Dessa är i allmänhet lineärt oberoende. Det går alltså inte att beskriva en yta med en enda tangentvektor. Däremot kan man beskriva ytan med en normalvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}. \tag{2.6}$$

Exempel: Sfären $\mathbf{r}(\theta, \varphi) = r_0(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ har tangentvektorerna

$$\theta = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = r_0 \left(\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, -\sin\theta\right) \tag{2.7}$$

och

$$\varphi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = r_0 \left(-\sin\theta\sin\varphi, \sin\theta\cos\varphi, 0\right). \tag{2.8}$$

Normalvektorn blir då

$$\begin{aligned} \theta \times \varphi = r_0^2 \left(\sin^2\theta\cos\varphi, \sin^2\theta\sin\varphi, \cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + \sin\theta\cos\theta\sin^2\varphi\right) = \\ r_0^2 \sin\theta \left(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta\right) = r_0 \sin\theta\,(x, y, z) = r_0^2 \sin\theta\,\hat{\mathbf{r}}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

En annan normalvektor är förstås enhetsvektorn $\hat{\mathbf{r}}$. Vi kan här lägga märke till att vår normalvektor $\theta \times \varphi$ blir noll på z-axeln. Det är ett tecken på att de sfäriska koordinaterna degenererar på z-axeln.

Exempel: För ytan $x + 2y + z = 8$ har vi funnit en parametrisering $\mathbf{r}(s, t) = (s, t, 8 - s - 2t)$. Vektorerna

$$\mathbf{s} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = (1, 0, -1) \tag{2.10}$$

och

$$\mathbf{t} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = (0, 1, -2) \tag{2.11}$$

är då tangentvektorer till planet och vi kan bilda en normalvektor genom att beräkna vektorprodukten

$$\mathbf{s} \times \mathbf{t} = (1, 2, 1). \tag{2.12}$$

Vi kan förstås direkt läsa ut normalvektorn ur ekvationen för planet också.

2.2 Kurvintegraler

Den vanligaste formen av kurvintegral är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \tag{2.13}$$

Denna typ av integraler uppkommer till exempel när vi beräknar det arbete en kraft $\mathbf{F}$ utför då den verkar på en partikel som följer banan C. Om vi inför en parametrisering $\mathbf{r}(t)$ med $t_0 \leq t \leq t_1$ för kurvan kan vi skriva integralen som

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Exempel: En partikel följer en bana $\mathbf{r}(t) = r_0(\cos\omega t, \sin\omega t, \omega t)$, där $0 \leq t \leq 4\pi/\omega$, under inverkan av en fjäderkraft $\mathbf{F} = k(x, y, z)$. Beräkna det arbete fjädern utför på partikeln.

Lösning: Vi kan skriva arbetet som integralen

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}. \tag{2.15}$$

Vi börjar med att beräkna tangentvektorn till banan C

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = r_0\omega\left(-\sin\omega t, \cos\omega t, 1\right). \tag{2.16}$$

Skalärprodukten blir sedan

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = kr_0\left(\cos\omega t, \sin\omega t, \omega t\right) \cdot r_0\omega\left(-\sin\omega t, \cos\omega t, 1\right) = \\ kr_0^2\omega\left[-\sin\omega t\cos\omega t + \sin\omega t\cos\omega t + \omega t\right] = kr_0\omega^2 t\end{aligned} \tag{2.17}$$

Vi kan nu skriva integralen som

$$\begin{aligned}W = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{4\pi/\omega} kr_0^2\omega^2 t\mathrm{d}t = kr_0^2\omega^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{4\pi/\omega} = \\ kr_0^2\omega^2\left(\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi}{\omega}\right)^2 - \frac{1}{2}0^2\right) = 8\pi^2 kr_0^2\end{aligned} \tag{2.18}$$

I en del fall behöver man inte explicit parametrisera kurvan utan det räcker att använda ett mer geometriskt resonemang.

Exempel: Beräkna integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}, \tag{2.19}$$

där $\mathbf{F} = F_0(\hat{\mathbf{r}} + \hat{\varphi})$ och C är den övre halvcirkeln med centrum i origo som går från $(r_0, 0)$ till $(-r_0, 0)$.

Lösning: Vi noterar först att $\hat{\varphi}$ är en tangentvektor till C, och att

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\varphi} = F_0. \tag{2.20}$$

Eftersom $\mathbf{dr} = \hat{\varphi}\mathrm{d}r$ så blir integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = F_0 \int_C \mathrm{d}r, \tag{2.21}$$

där vi kan tolka själva integralen som längden av halvcirkel. Detta ger

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \pi F_0 r_0. \tag{2.22}$$

Det finns också andra typer av kurvintegraler som kan dyka upp

$$\int_C \phi\mathbf{dr}, \quad \int_C \mathbf{F} \times \mathbf{dr}, \tag{2.23}$$

och dessa kan tolkas analogt med integralerna ovan.

Exempel: En cirkulär strömslinga med radien r_0 genom vilken det löper en ström I ligger i xy-planet. Beräkna den kraft med vilken ett homogent magnetfält $B_0\hat{\mathbf{z}}$ påverkar slingan.

Lösning: Ett element $\mathbf{d}l$ av slingan påverkas av en kraft

$$\mathbf{dF} = I\mathbf{dl} \times \mathbf{B}, \tag{2.24}$$

alltså ges den totala kraften av

$$\mathbf{F} = \int_C I\mathbf{dl} \times \mathbf{B}. \tag{2.25}$$

Om vi antar att cirkelns centrum ligger i origo, så får vi att $\hat{\varphi}$ är en tangentvektor till cirkeln. Vi noterar nu att

$$\mathbf{B} \times I\mathbf{dl} = B_0 I\,(\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\varphi})\,\mathrm{d}l = B_0 I\,(-\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}l. \tag{2.26}$$

Lägg nu märke till att $\hat{\mathbf{r}}$ har motsatt riktning i två diametralt motsatta punkter på cirkeln, och därför kommer kraften från dessa båda punkter att ta ut varandra. Vi kan upprepa detta resonemang för alla punkter längs strömslingan, och alltså måste nettokraften på slingan vara 0.

Övningsuppgifter

1. Beräkna integralen
$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$
där
$$\mathbf{F} = (ye^x, xe^y)$$
och C är en triangel med hörnen i $(0,0)$, $(2,0)$ och $(2,2)$ genomlöpt i positiv led, dvs moturs.

2. Beräkna integralen
$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$
där
$$\mathbf{F} = \left(y \ln \frac{x^2}{y}, -\frac{x}{y}\right)$$
och C är parabelbågen $y = x^2$ från $(1,1)$ till $(2,4)$.

3. En partikel som påverkas av kraften $\mathbf{F} = (y^3, x^3)$ rör sig i positiv led längs ellipsen $x^2 + y^2/4 = 1$ från punkten $(0,2)$ till punkten $(1,0)$. Beräkna det arbete som kraften uträttar på partikeln.

4. Beräkna integralen
$$\int_C F_0 \sin\varphi\hat{\varphi} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r},$$
där C är cirkeln $\rho = a, z = 0$.

5. Vektorfältet $\mathbf{B}$ och kurvan C är givna:
$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}\frac{1}{x^2 + y2}\left[(x-y)\,a^2\hat{\mathbf{x}} + (x+y)\,a^2\hat{\mathbf{y}} + \left(x^2+y^2\right)z\hat{\mathbf{z}}\right]$$
$$C: \ \mathbf{r} = \left(a\cos\varphi, a\sin\varphi, \frac{a\varphi}{\pi}\right), \quad 0 \le \varphi \le 2\pi.$$
Beräkna integralen
$$\int_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B}$$
från punkten $(a,0,0)$ till punkten $(a,0,2a)$.

6. Vektorfältet $\mathbf{B}$ är givet i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$,

$$\mathbf{B}(r,\theta,\varphi) = \frac{B_0 a}{r\sin\theta}\left(\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\theta} + \hat{\varphi}\right).$$

Bestäm kurvintegralen av $\mathbf{B}$ längs kurvan C med parameterframställningen

$$C: \ \mathbf{r} = \left(a\cos\alpha, 2a\sin\alpha, \frac{a\alpha}{\pi}\right)$$

från punkten $(a,0,0)$ till $(a,0,2a)$

7. En partikel rör sig i en spiralliknande bana på ytan av en sfär med radien 2 dm och centrum i origo. Dess läge vid tiden $t\,(0 \leq t \leq \pi)$ ges i sfäriska koordinater av

$$\begin{cases} r &= 2 \text{ dm} \\ \theta &= \frac{1}{2}(\pi - t) \\ \varphi &= 2t \end{cases}$$

Sfärens yta sprayas med en kemisk lösning vilken påverkar partikeln med en friktionskraft $\mathbf{F} = -\gamma\mathbf{v}$, där $\mathbf{v}$ är partikelns hastighet och γ en friktionskoefficient med värdet 0.3 Ns/m. Hur mycket energi måste tillföras partikeln i tidsintervallet $\pi/2 \leq t \leq \pi$ för att dennas rörelse skall vara opåverkad av friktionen? Ledning:

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\varphi}\mathrm{d}\varphi.$$

(991030)

2.3 Ytintegraler

Den vanligaste formen av en ytintegral är

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}. \tag{2.27}$$

Denna typ av integraler uppkommer till exempel när vi vill beräkna flödet av en fluid genom ytan S. I detta fall är $\mathbf{F} = \rho\mathbf{u}$, där ρ är fluidens densitet och $\mathbf{u}$ är dess hastighet. Om vi parametriserar ytan S med två parametrar s och t kan vi skriva $\mathbf{r}(s,t)$ och

$$\mathbf{dS} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\mathrm{d}s\mathrm{d}t, \tag{2.28}$$

och alltså kan vi skriva integralen som

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \int_{s_1}^{s_2}\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial s}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial t}\right)\mathrm{d}s\mathrm{d}t. \tag{2.29}$$

Exempel: Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} \tag{2.30}$$

där

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a}(x,y,z), \tag{2.31}$$

och ytan S ges av

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \quad z \geq 0. \tag{2.32}$$

Lösning: Ytan S är den övre halvan av en ellipsoid med halvaxlarna a, $2a$ och $3a$. Vi kan parametrisera ytan med hjälp av de polära koordinaterna θ och φ

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& a\sin\theta\cos\varphi \\ y &=& 2a\sin\theta\sin\varphi \\ z &=& 3a\cos\theta \end{array}\right. \tag{2.33}$$

där $0 \leq \theta \leq \pi/2$ och $0 \leq \varphi < 2\pi$. Vi får då tangentvektorerna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = a\left(\cos\theta\cos\varphi, 2\cos\theta\sin\varphi, -3\sin\theta\right). \tag{2.34}$$

och

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a\left(-\sin\theta\sin\varphi, 2\sin\theta\cos\varphi, 0\right). \tag{2.35}$$

Normalvektorn blir då

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = a^2\left(6\sin^2\theta\cos\varphi, 3\sin^2\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\sin\theta\cos^2\varphi + 2cos\theta\sin\theta\sin^2\varphi\right) = \\ a^2\sin\theta\left(6\sin\theta\cos\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{2.36}$$

Vi kan nu beräkna skalärprodukten

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi}\right) = \\ F_0\left(\sin\theta\cos\varphi, 2\sin\theta\sin\varphi, 3\cos\theta\right) \times a^2\sin\theta\left(6\sin\theta\cos\varphi, 3\sin\theta\sin\varphi, 2\cos\theta\right) = \\ F_0a^2\sin\theta\left(6\sin^2\theta\cos^2\varphi + 6\sin^2\theta\sin^2\varphi + 6\cos^2\theta\right) = \\ F_0a^2\sin\theta\left(6\sin^2\theta + 6\cos^2\theta\right) = 6F_0a^2\sin\theta. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Vi kan nu beräkna integralen

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} 6F_0a^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 6F_0a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\sin\theta\mathrm{d}\theta = \\ 12\pi F_0a^2\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi/2} = 12\pi F_0a^2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Det finns också andra typer av ytintegraler som dyker upp i olika tillämpningar, såsom

$$\int_S \mathbf{F}\mathrm{d}S, \quad \int_S \varphi\mathbf{dS}, \quad \int_S \mathbf{F}\times\mathbf{dS}. \tag{2.39}$$

Exempel: Beräkna ytintegralen

$$\oint_S \mathbf{r}\mathrm{d}S \tag{2.40}$$

av ortsvektorn $\mathbf{r}$ över sfären S,

$$S: \ |\mathbf{r} - a\hat{\mathbf{z}}| = a. \tag{2.41}$$

Lösning: Integralen skall bli en vektor. Integrationsområdet är ytan av en sfär med centrum i $a\hat{\mathbf{z}}$. Vi flyttar origo till sfärens centrum för att dra nytta av den sfäriska symmetrin. Vi kan då skriva $\mathbf{r} = a\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{r_1}$, där $\mathbf{r_1}$ är ortsvektorn i det nya koordinatsystemet. Integralen kan då delas upp i två delar

$$\oint_S \mathbf{r}\mathrm{d}S = \oint_S a\hat{\mathbf{z}}\mathrm{d}S + \oint_S \mathbf{r_1}\mathrm{d}S = a\hat{\mathbf{z}}\oint_S \mathrm{d}S + \oint_S \mathbf{r_1}\mathrm{d}S. \tag{2.42}$$

Den första integralen är sfärens area $4\pi a^2$. Den första termen blir därför $4\pi a^3\hat{\mathbf{z}}$.

För den andra termen tänker vi oss att vi summerar vektorer $\mathbf{r_1}$ över varje punkt på sfärens yta. I och med att sfären har sitt centrum i origo så blir vektorerna lika långa på varje punkt på sfärens yta, men på två diametralt motsatta punkter på ytan måste vektorerna peka åt motsatta håll, och därmed ta ut varandra. Det följer därmed att integralen måste vara 0. Därför får vi

$$\oint_S \mathbf{r}\mathrm{d}S = 4\pi a^3\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.43}$$

Exempel: Låt S vara mantelytan av cylindern $x^2 + y^2 = a^2$, $|z| < a$. Beräkna integralen

$$\int_S (\mathbf{r} + \rho\hat{\varphi}) \times \mathbf{dS} \tag{2.44}$$

Lösning: Integralen skall bli en vektor. Med tanke på att integrationsområdet är en cylinder är det fördelaktigt att arbeta med cylinder-koordinater. I cylinderkoordinater kan vi skriva ortsvektorn som

$$\mathbf{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.45}$$

Normalvektorn till cylindern är $\hat{\rho}$. Vi kan också skriva ytelementet $\mathrm{d}S$ på cylindern som $a\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$.

Vi beräknar nu först vektorprodukten

$$(\mathbf{r} + \rho\hat{\varphi}) \times \hat{\rho} = (\rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}} + \rho\hat{\varphi}) \times \hat{\rho} = z\hat{\varphi} - \rho\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.46}$$

Lägg märke till att $\rho = a$ på cylinderns mantelyta. Vi kan nu skriva integralen som

$$\int_S (\mathbf{r} + \rho\hat{\varphi}) \times \mathbf{dS} = \int_0^{2\pi} \int_{-a}^{a} (z\hat{\varphi} - a\hat{\mathbf{z}})\, a\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi. \tag{2.47}$$

Lägg märke till att enhetsvektorn $\hat{\varphi}$ inte är en konstant. När vi beräknar integralen

$$\int_0^{2\pi} \hat{\varphi}\mathrm{d}\varphi. \tag{2.48}$$

så summerar vi $\hat{\varphi}$ över alla punkter längs en cirkel till vilken den är tangenten. Eftersom tangentvektorn har motsatt riktning i två punkter som skiljer sig åt med en vinkel π, så måste integralens värde bli 0 när vi har summerat över alla punkter. Den första termen i integralen ger därför inget bidrag. $\hat{\mathbf{z}}$ däremot är en konstant vektor och vi kan därför utan problem beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \int_{-a}^{a} -a^2\hat{\mathbf{z}}\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi = -a^2\hat{\mathbf{z}} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-a}^{a} \mathrm{d}z = -a^2\hat{\mathbf{z}}\, 2\pi\, 2a = -4a^3\pi\hat{\mathbf{z}}, \tag{2.49}$$

vilket då är vår ursprungliga integrals värde.

Det torde framgå av exemplen ovan att integralberäkningarna kan bli mycket tidsödande om man inte kan hitta enkla geometriska resonemang. Vi skall nedan studera mer effektiva metoder för att beräkna både kurv- och ytintegraler med Stokes och Gauss satser.

Övningsuppgifter

1. Beräkna

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S},$$

där

$$\mathbf{F} = \left(xz, yz, \frac{z^3}{a}\right).$$

och S är en sfär med radien a och centrum i origo.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \left(\frac{A}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + B\hat{\mathbf{z}}\right) \cdot \mathrm{d}S,$$

där S är sfären $r = a$.

2.4 Gauss sats

Ofta, men inte alltid, blir beräkningen av en ytintegral enklare om man använder Gauss sats

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V, \tag{2.50}$$

där den slutna ytan S innesluter volymen V, och divergensen av vektorfältet $\mathbf{F}$ i kartesiska koordinater ges av

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{2.51}$$

Det finns två satser som är analoga med Gauss sats

$$\oint_S \mathbf{dS} \times \mathbf{F} = \int_V \mathrm{d}V \nabla \times \mathbf{F} \tag{2.52}$$

och

$$\oint_S \mathbf{dS} \phi = \int_V \mathrm{d}V \nabla \phi. \tag{2.53}$$

När man tillämpar dessa satser är det viktigt att komma ihåg att de endast gäller för funktioner, $\mathbf{F}$ och ϕ, som är kontinuerliga och deriverbara över hela V. Därtill måste begränsningsytan vara styckvis glatt. Detta innebär att vi i allmänhet måste lägga till element till ytan S så att ytan blir sluten och så att vi utesluter singulariteter hos funktionen. En punktsingularitet kan man till exempel innesluta i en sfär med radien ϵ, om man sedan kan visa att integralen över sfären går mot ett konstant värde då $\epsilon \to 0$. På motsvarande vis kan man innesluta en linjesingularitet i en cylinder med radien ϵ. Tänk på att normalen till ytan alltid skall peka ut från volymen V.

En allmän strategi för att beräkna ytintegraler är därför:

1. Bestäm utseendet på den angivna ytan S och rita en tydlig figur.
2. Undersök fältet $\mathbf{F}$. Identifiera singulariteter. Beräkna $\nabla \cdot \mathbf{F}$ eller $\nabla \times \mathbf{F}$.
3. Slut ytan S på ett sådant sätt att volymen V inte innehåller några singulariteter.
4. Teckna Gauss sats.
5. Beräkna de integraler som uppträder i Gauss sats.
6. Bestäm gränsvärdena då$\epsilon \to 0$ för ytintegralerna kring singulariteterna.
7. Kontrollera att normalen har rätt orientering överallt.

Exempel: I havet kan vi skriva trycket som

$$p = -\rho g z, \quad \text{för} \ \ z < 0, \tag{2.54}$$

där ρ är vattnets densitet och g är tyngdaccelerationen, vilka båda antas vara konstanta. En ubåt med formen

$$x^2 + \frac{y^2}{400} + (z + H_0)^2 = a^2 \tag{2.55}$$

ligger på djupet $H_0 > a$. Bestäm den totala tryckkraften som verkar på ubåten.

Lösning: Tryckkraften som verkar på ett ytelement $\mathbf{dS}$ är $-p\mathbf{dS} = \rho g z \mathbf{dS}$. Den totala tryckkraften som verkar på ubåten är därför

$$\oint_S -p\mathbf{dS}. \tag{2.56}$$

Vi konstaterar först att ubåten är ellipsformad med halvaxlarna a, $20a$ och a. Dess centrum ligger i punkten $(0, 0, -H_0)$ och hela ubåten ligger under vattenytan.

Funktionen p saknar singulariteter och dess gradient är

$$\nabla p = (0, 0, -\rho g) = -\rho g\hat{\mathbf{z}} \tag{2.57}$$

Ytan S är redan sluten, så vi behöver inte modifiera ytan. Vi kan nu använda den Gauss-analoga satsen

$$\oint_S -p\mathbf{dS} = \int_V -\nabla p \mathrm{d}V = \int_V \rho g\hat{\mathbf{z}}\mathrm{d}V = \rho g\hat{\mathbf{z}} \int_V \mathrm{d}V. \tag{2.58}$$

Denna integral är lika med ellipsoidens volym, som är $4\pi abc/3$, där a, b och c är ellipsoidens halvaxlar. I vårt fall blir ellipsoidens volym $80\pi a^3/3$, och integralens värde blir

$$\frac{80}{3}\pi a^3 \rho g\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.59}$$

Lägg märke till att vad vi har gjort nu är att visa Arkimedes princip att lyftkraften som verkar på en kropp är lika med tyngden av den undanträngda vätskan.

Exempel: Betrakta fältet

$$\mathbf{F} = F_0 a\frac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{2.60}$$

Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}, \tag{2.61}$$

där ytan S ges av

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \;\; z \geq 0. \tag{2.62}$$

Lösning: Ytan S är den övre halvan av en sfär med radien R och centrum i origo. Vi lägger också märke till att $\mathbf{F}$ är singulär i origo. Divergensen av $\mathbf{F}$ blir

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = F_0 a\left(\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} + \right.$$
$$\left.\frac{1}{x^2+y^2+z^2} - \frac{2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) = F_0 a\left(\frac{3}{x^2+y^2+z^2} - 2\frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\right) =$$
$$\frac{F_0 a}{x^2+y^2+z^2} = \frac{F_0 a}{r^2}, \tag{2.63}$$

där vi till slut har uttryckt $\nabla\cdot\mathbf{F}$ i polära koordinater. På samma sätt kan vi skriva $\mathbf{F}$ som

$$\mathbf{F} = \frac{F_0 a}{r}\hat{\mathbf{r}}. \tag{2.64}$$

Vi kan sluta ytan S genom att lägga till en cirkelskiva S_1 i xy-planet. Denna cirkelskiva får normalvektorn $-\hat{\mathbf{z}}$ om ytan S har normalvektorn $\hat{\mathbf{r}}$. Dock måste vi skära ut en liten skiva med radien ϵ runt origo. Kring origo lägger vi in en halvsfär S_ϵ med radien ϵ och med en normalvektor $-\hat{\mathbf{r}}$. Vi kan nu med Gauss sats skriva

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} + \int_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} + \int_{S_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V. \tag{2.65}$$

Volymsintegralen blir

$$\int_V \frac{F_0 a}{r^2} r^2 \sin\theta \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = F_0 a \int_0^R \mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \sin\theta\mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi F_0 a R. \tag{2.66}$$

Låt oss nu ta hand om integralerna över S_1 och S_ϵ. Först konstaterar vi att S_1 har normalvektorn $\hat{\mathbf{z}}$, men att på ytan S_1 är $\hat{\mathbf{r}}$ vinkelrät mot $\hat{\mathbf{z}}$, och alltså måste integralen över S_1 vara 0. Integralen S_ϵ beräknar vi på följande sätt

$$\int_{S_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \int_{S_\epsilon} F_0\frac{a}{r}\hat{\mathbf{r}}\cdot(-\hat{\mathbf{r}})\,\mathrm{d}S = -F_0\frac{a}{\epsilon}\int_{S_\epsilon} \mathrm{d}S, \tag{2.67}$$

där vi har utnyttjat att $r = \epsilon$ på ytan S_ϵ. Integralen är nu densamma som halvsfärens yta, $2\pi\epsilon^2$, så vi har att

$$\int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = -F_0 \frac{a}{\epsilon} 2\pi\epsilon^2 = -2\pi F_0 a\epsilon. \tag{2.68}$$

Detta uttryck går mot 0 då $\epsilon \to 0$. Alltså följer det att

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 2\pi F_0 a R. \tag{2.69}$$

Övningsuppgifter

Integralberäkning med hjälp av Gauss och Stokes satser är ett av huvudmomenten i kursen. Samtidigt krävs det en stor vana att göra detta effektivt, och många uppgifter kan tyckas närmast omöjliga till att börja med. Vi börjar därför med några enklare uppgifter med ledningar, för att sedan gå över till de svårare uppgifterna. Innan man börjar med uppgifterna här kan det dock vara lämpligt att först göra uppgifterna i *P. C. Matthews: Vector Calculus*. Det är också bra att lägga märke till att uppgifterna i det här kapitlet har valts med tanke på att divergensen skall beräknas i kartesiska koordinater. Ofta är det mer effektivt att beräkna divergensen i någon form av kroklinjiga koordinater, vilket vi kommer att behandla i samband med de kroklinjiga koordinaterna.

1. Vektorfältet $\mathbf{F}$ ges av potentialen

$$\phi(x, y, z) = 6xyz + 2xy,$$

det vill säga $\mathbf{F} = -\nabla\phi$. Beräkna integralen

$$\oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{dS}$$

då S är rotationsellipsoiden

$$S: \;\; x^2 + y^2 + (3z - 1)^2 = 1.$$

Ledning: $\mathbf{F}$ är överallt kontinuerligt deriverbar.

$$\oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{dS} = -\int_V \nabla \times \mathbf{F} \mathrm{d}V,$$

men

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla\phi = 0.$$

Den sista likheten är en allmän regel som vi återkommer till nedan.

2. Vektorfältet

$$\mathbf{F} = \left(x, -y^2, 1\right)$$

och cylinderytan S sammansatt av mantelytan S_1, bottenytan S_2 och locket S_3

$$S_1: \;\; x^2 + y^2 = a^2, \;\; -b < z < b S_2: \;\; z = -b, \;\; x^2 + y^2 < a^2 S_3: \;\; z = b, \;\; x^2 + y^2 < a^2$$

är givna. Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över S.

Ledning:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = 1 - 2y$$

$-2y$ är udda vid spegling i planet $y = 0$. Volymen av cylindern är $2\pi a^2 b$.

3. Vektorfältet

$$\mathbf{F} = \mathbf{r} + \hat{\mathbf{z}}$$

och ytan S, som är en del av en rotationsparaboloid,

$$S: \ x^2 + y^2 = 1 - 2z, \ \ 0 < z < \frac{1}{2}, \ \ x > 0,$$

är givna. Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över S.

Ledning: $\hat{\mathbf{z}}$ ger bidraget $\frac{\pi}{2}$. $\mathbf{r}$ ger bidraget $\frac{3\pi}{8}$.

$$V = \int_0^{1/2} \frac{\pi}{2}(1 - 2z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi}{8}.$$

4. Det skalära fältet

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

och sfären

$$S: \ x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 4$$

är givna. Beräkna ytintegralen

$$\oint_S \phi \mathbf{dS}.$$

Ledning:

$$\oint_S \phi \mathbf{dS} = \int_V \nabla\phi \mathrm{d}V = 2\int_V (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}})\,\mathrm{d}V$$

Byt variabel. $z_1 = z - 3$, så att $x^2 + y^2 + z_1^2 = 4$ och beräkna

$$\int_V (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + (z_1 + 3)\,\hat{\mathbf{z}})\,\mathrm{d}V.$$

Sfären går över i sig själv vid speglingar $x \to -x$ osv

$$\oint_S \phi \mathbf{dS} = 6V\hat{\mathbf{z}}.$$

5. Vektorfältet

$$\mathbf{F} = 4x\hat{\mathbf{y}} + \frac{\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}|^3}$$

och ellipsoiden

$$S: \ 4x^2 + 4y^2 + (z - 1)^2 = 1$$

är givna. Beräkna ytintegralen

$$\oint_S \mathbf{F} \times \mathbf{dS}$$

Ledning: Låt $\mathbf{F}_1 = 4x\hat{\mathbf{y}}$ och

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}}{|\mathbf{r} - \hat{\mathbf{z}}|^3}.$$

S är en ellipsoid med halvaxlarna $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, och 1 samt med centrum i $(0, 0, 1)$. $\nabla \times \mathbf{F_1} = 4\hat{\mathbf{z}}$. $\mathbf{F_1}$:s bidrag är $-\frac{4\pi}{3}\hat{\mathbf{z}}$. Lägg in en sfär S_2 med centrum i $(0, 0, 1)$ och radien t. ex. $\frac{1}{2}$. $\mathbf{F_2} \perp \mathbf{S_2}$.

6. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F} = \left(xz, yz, z^2\right)$ och S är den del av enhetssfären som ligger inom konområdet $x^2 + y^2 \leq z^2$, $z > 0$ och normalvektorn till S är uppåtriktad.

7. Låt S vara ytan $y^2+z^2=1$, $-1 \leq x \leq 1$, $z \geq 0$ med uppåtriktad normalvektor. Beräkna

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F} = \left(x, x^2yz^2, x^2y^2z\right)$.

8. Trycket $p(\mathbf{r})$ i en kompressibel vätska kan skrivas som

$$p(\mathbf{r}) = p_0 - \rho g z + k z^2$$

för $z < 0$, där p_0, ρ, g och k är konstanter. En kropp nedsänkt i vatten upptar området V,

$$V: \qquad 4(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{a})^2 + 4(\frac{z}{a})^2 + 32\frac{z}{a} + 48 < 0,$$

där a är en konstant. Beräkna den totala tryckkraften $\mathbf{F} = -\int_S p \; d\mathbf{S}$ på begränsningsytan till kroppen.

(990817)

9. Låt $\mathbf{n}$ vara den normal till hyperboloiden $x^2+y^2-z^2=4$ som pekar från z-axeln och låt

$$\mathbf{u} = \frac{(xz, yz, xy)}{x^2+y^2} \tag{2.70}$$

Beräkna

$$\int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mathrm{d}S \tag{2.71}$$

över den delen av hyperboloiden där $a \leq z \leq b$.

2.5 Stokes sats

Vi har ovan sett hur vi kan använda Gauss sats för att beräkna ytintegraler. På samma sätt är Stokes sats ett effektivt verktyg för att beräkna kurvintegraler av ett fält $\mathbf{F}$. Stokes sats säger att för en kurva C, som är randen till en yta S så gäller att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{dS}, \tag{2.72}$$

där rotationen i kartesiska koordinater ges av

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{2.73}$$

Vektorfältet $\mathbf{F}$ måste vara kontinuerligt deriverbart på ytan S, som måste vara sammanhängande och orienterbar, det vill säga ytan skall ha två särskiljbara sidor. Orienteringen av ytan S bestäms av den riktning i vilken randen C genomlöps och högerhandsregeln. Kurvan C måste inte vara sammanhängande, utan den kan bestå av flera styckvis kontinuerliga delar, så att det till exempel är tillåtet att det finns hål i ytan S. Genom att lägga in små cirklar kring singulariteter hos $\mathbf{F}$ kan vi då skära bort de singulära punkterna från ytan S.

Det finns två satser som är analoga med Stokes sats

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{F} = \int_S (\mathbf{dS} \times \nabla) \times \mathbf{F}, \tag{2.74}$$

och

$$\oint_C \mathbf{dr}\phi = \int_S (\mathbf{dS} \times \nabla)\, \phi. \tag{2.75}$$

Vi kan formulera en allmän strategi för integralberäkning med hjälp av Stokes sats. Denna strategi liknar den vi använder för Gauss sats:

1. Bestäm kurvan C och rita en tydlig figur.
2. Undersök fältet $\mathbf{F}$. Beräkna $\nabla \times \mathbf{F}$. Identifiera singulariteter och dela upp fältet i delfält.
3. Slut C och bestäm ytan S (denna yta är inte entydigt bestämd och kan ibland anpassas efter fältet $\mathbf{F}$.
4. Teckna Stokes sats.
5. Beräkna de ytintegraler som uppträder.
6. Ta hand om kurvintegralerna kring singulariteterna.
7. Kontrollera att delkurvorna och ytan S har konsistenta orienteringar.

Exempel: Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}, \tag{2.76}$$

där kurvan C ges av

$$x^2 + 4y^2 = 16a^2, \quad z = 0, \tag{2.77}$$

och genomlöps i positiv riktning, och fältet ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a}(y, y, z). \tag{2.78}$$

Lösning: Kurvan C är en ellips i xy-planet med halvaxlarna $4a$ och $2a$. Ellipsen har normalvektorn $\hat{\mathbf{z}}$.

Fältet $\mathbf{F}$ är reguljärt överallt, och har rotationen

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{F_0}{a}(0, 0, -1). \tag{2.79}$$

Stokes sats ger oss nu att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}S = \int_S -\frac{F_0}{a} \mathrm{d}S = -\frac{F_0}{a} \int_S \mathrm{d}S. \tag{2.80}$$

Den sista integralen är nu ytan av ellipsen, som är $\pi \times 4a \times 2a = 8\pi a^2$, och alltså blir vår integral

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 8\pi F_0 a. \tag{2.81}$$

Exempel: Beräkna det arbete som kraften

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \left(x, y + \frac{x\sqrt{x^2+y^2}}{a}, 0 \right) \tag{2.82}$$

utför på en partikel som rör sig från punkten $(0, -a, 0)$ till $(0, a, 0)$ längs en halvcirkel med centrum i origo. Längs med halvcirkeln är $x < 0$.

Lösning: Vi vill alltså beräkna integralen

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}, \tag{2.83}$$

där C är partikelns bana.

Fältet $\mathbf{F}$ är singulärt längs z-axeln och dess rotation är

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{a}\hat{\mathbf{z}}. \tag{2.84}$$

Vi kan sluta banan genom att lägga till en rak linje, C_+ från $(0, a, 0)$ till $(0, \epsilon, 0)$ och en annan rak linje, C_- mellan $(0, -\epsilon, 0)$ och $(0, -a, 0)$. Punkterna $(0, \epsilon, 0)$ och $(0, -\epsilon, 0)$ binder vi samman med en halvcirkel, C_ϵ med radien ϵ. Den resulterande slutna kurvan kallar vi för enkelhets skull C_{tot}, och den är randen till en plan yta S, som har normalvektorn $\hat{\mathbf{z}}$.

Stokes sats ger oss nu att

$$\oint_{C_{\text{tot}}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S \frac{1}{a} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}S = \frac{1}{a} \int_S \mathrm{d}S = \frac{\pi a}{2}, \tag{2.85}$$

eftersom den sista integralen är arean av en halvcirkel med radien a.

Vi betraktar nu de ingående kurvintegralerna. Först konstaterar vi att C_+ har tangentvektorn $-\hat{\mathbf{y}}$ och att $x = 0$ längs C_+. Detta ger oss att

$$\int_{C_+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{C_+} \hat{\mathbf{y}} \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) \mathrm{d}y = \epsilon - a. \tag{2.86}$$

På samma sätt blir integralen längs med C_-

$$\int_{C_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{C_-} -\hat{\mathbf{y}} \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) \mathrm{d}y = a - \epsilon \tag{2.87}$$

Det återstår nu att beräkna integralen över C_ϵ. Detta blir enklare om vi skriver om fältet $\mathbf{F}$ i cylinderkoordinater. Lägg då märke till att $\hat{\mathbf{y}} = \sin\varphi\hat{\rho} + \cos\varphi\hat{\varphi}$ och att $x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} = \rho\hat{\rho}$. Vi kan då skriva

$$\mathbf{F} = \frac{\rho \cos\varphi}{a} \left(sin\varphi\hat{\rho} + \cos\varphi\hat{\varphi} \right) + \hat{\rho}. \tag{2.88}$$

Tangentvektorn till C_ϵ är $-\hat{\varphi}$, så vi får

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_{C_\epsilon} -\frac{\rho \cos^2\varphi}{a} \rho \mathrm{d}\varphi. \tag{2.89}$$

Längs C_ϵ är $\rho = \epsilon$, vilket betyder att integralen $\to 0$ då $\epsilon \to 0$.

Till slut kan vi skriva

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{C_+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \int_{C_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}. \tag{2.90}$$

Noterar vi nu att integralerna över C_+ och C_- går mot $\pm a$ då $\epsilon \to 0$, så får vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \frac{\pi a}{2} \tag{2.91}$$

Exempel: Kurvan

$$C: \ \mathbf{r} = \begin{cases} a\left(\cos\alpha, \sin\alpha, \alpha\right) & \text{för} \quad 0 \le \alpha \le 2\pi \\ a\left(1, 0, 4\pi - \alpha\right) & \text{för} \quad 2\pi \le \alpha \le 4\pi \end{cases} \tag{2.92}$$

och vektorfältet

$$\mathbf{B}\left(x, y, z\right) = B_0 \left(a \frac{y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}}{x^2 + y^2} + \frac{x}{a} \hat{\mathbf{z}} \right) \tag{2.93}$$

är givna. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B}, \tag{2.94}$$

som är proportionell mot kraften på en strömslinga C i magnetfältet $\mathbf{B}$.

Lösning: Den givna kurvan C är sluten, består av ett varv av en spiral på cylinderytan $x^2+y^2 = a^2$, med en rät linje som återledning. Fältet har dock en singularitet på z-axeln, som gör att den med Stokes sats analoga integralsatsen måste användas med försiktighet. Vi visar hur detta kan göras, även om det är något lättare att direkt använda integralens definition.

Vi tillämpar satsen

$$\oint_{C-C'} \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = \int_S (\mathbf{dS} \times \nabla) \times \mathbf{B} \tag{2.95}$$

där S är den del av cylinderytan som avgränsas av C och cirkeln $C': \ x^2 + y^2 = a^2, \ z = 0$. Både C och C' genomlöps i positiv riktning, vilkent innebär att normalvektorn till S blir $-\hat{\rho}$.

Låt oss nu beräkna

$$(-\hat{\rho} \times \nabla) \times \mathbf{B} \tag{2.96}$$

i rätvinkliga koordinater. Vi har då att $\hat{\rho} = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$. Därför blir

$$-\hat{\rho} \times \nabla = -\left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial z}, -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial z}, cos\phi \frac{\partial}{\partial y} - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x}\right). \tag{2.97}$$

Vi får då att

$$\begin{aligned}(-\hat{\rho} \times \nabla) \times \mathbf{B} = B_0 \Bigg(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}\left(-a\frac{x}{x^2+y^2}\right) - \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x}\left(-a\frac{x}{x^2+y^2}\right), \\ -\cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}\left(a\frac{y}{x^2+y^2}\right) + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{y}{x^2+y^2}\right), 0\Bigg).\end{aligned} \tag{2.98}$$

Om vi nu beräknar derivatorerna och utnyttjar att

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ \ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{2.99}$$

så får vi

$$\begin{aligned}(-\hat{\rho} \times \nabla) \times \mathbf{B} = B_0 a \Bigg(\frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{5/2}} + \frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{5/2}}, \\ -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}} - \frac{2xy^2}{(x^2+y^2)^{5/2}}, 0\Bigg) = \\ B_0 a \left(\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}, -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, 0\right) = \frac{B_0 a}{\rho^2}(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0) = -B_0\frac{a}{\rho^2}\hat{\varphi}.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Därför blir integralen

$$\begin{aligned}\int_S (\mathbf{dS} \times \nabla) \times \mathbf{B} = B_0 a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\varphi a} \frac{(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)}{a} \mathrm{d}z = \\ B_0 a \int_0^{2\pi} \frac{(\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)}{a} \varphi a \mathrm{d}\varphi.\end{aligned} \tag{2.101}$$

Vi beräknar nu de båda integralerna

$$\int_0^{2\pi} \varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = [-\varphi\cos\varphi]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = -2\pi, \tag{2.102}$$

och

$$\int_0^{2\pi} \varphi \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = [\varphi\sin\varphi]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi = 0. \tag{2.103}$$

Detta ger att

$$\oint_{C-C'} \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = -2\pi B_0 a \hat{\mathbf{x}}. \tag{2.104}$$

Det återstår nu att beräkna

$$\int_{C'} \mathbf{dr} \times \mathbf{B}. \tag{2.105}$$

Vi noterar först att $y\hat{\mathbf{x}} - x\hat{\mathbf{y}}$ är parallell med $\hat{\varphi}$, som är tangentvektor till C'. Därmed reduceras integralen till

$$\oint_{C'} \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = \int_0^{2\pi} a\mathrm{d}\varphi\hat{\varphi} \times B_0 \frac{x}{a}\hat{\mathbf{z}} = B_0 a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \frac{x}{a}\hat{\rho} =$$

$$B_0 a \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \cos\varphi \left(\cos\varphi, \sin\varphi, 0\right) = B_0 a\pi\hat{\mathbf{x}}. \tag{2.106}$$

Alltså har vi slutligen

$$\oint_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B} = -2\pi B_0 a\hat{\mathbf{x}} + \pi B_0 a\hat{\mathbf{x}} = -\pi B_0 a\hat{\mathbf{x}}. \tag{2.107}$$

Övningsuppgifter

1. Vektorfältet

$$\mathbf{F}\left(x, y, z\right) = \left(x - y, y - z, z - x\right),$$

och ytorna

$$\begin{array}{lcl} S_1 & : & 4\rho^2 + z^2 = 20 \\ S_2 & : & \arctan \frac{z}{x+y} = \frac{\pi}{3} \end{array}$$

är givna. Bestäm kurvintegralen

$$\oint_C \mathbf{F} \times \mathbf{dr}$$

runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2

2. En partikel påverkas av kraftfältet

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{\pi y}{a} + \sin\frac{\pi z}{a}\right)\hat{\mathbf{x}} + \frac{x}{a}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\pi x}{a}\cos\frac{\pi z}{a}\hat{\mathbf{z}}\right].$$

Vilket arbete uträttar fältet då partikeln beskriver cirkeln som ges av

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

och

$$x = z?$$

3. Beräkna integralen

$$\oint_\Gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där

$$\mathbf{F} = \left[x^2 - a\left(y + z\right)\right]\hat{\mathbf{x}} + \left(y^2 - az\right)\hat{\mathbf{y}} + \left[z^2 - a\left(x + y\right)\right]\hat{\mathbf{z}},$$

och Γ är den kurva som utgör skärningslinjen mellan cylindern

$$\left(x - a\right)^2 + y^2 = a^2,\ z \geq 0$$

och sfären

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,\ R > 2a,$$

där a är en konstant med dimensionen längd.

(991130)

4. Vektorfältet

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r}\right) = \left(\frac{a^3 y}{x^2 + y^2} - az, ax - \frac{a^3 x}{x^2 + y^2}, ay + x^2\right)$$

och ytorna

$$\begin{array}{lcl} S_1 & : & 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 40a^2 \\ S_2 & : & x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ z > 0 \end{array}$$

är givna. Bestäm tangentlinjeintegralen av $\mathbf{A}$ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2.

5. En kurva C med parameterframställningen

$$\mathbf{r} = (a\cos\varphi, a\sin\varphi, b\varphi) \quad 0 \le \varphi < 2\pi,$$

och ett vektorfält

$$\mathbf{B} = B_0 \left(\frac{x}{a}\right)^3 \hat{\mathbf{z}}$$

är givna. Beräkna integralen

$$\mathbf{F} = \int_C \mathbf{dr} \times \mathbf{B}.$$

($I\mathbf{F}$ är kraften på en strömgenomfluten spolar med strömmen I och formen C i magnetfältet $\mathbf{B}$.)

6. Vektorfältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a}(y-x, x-y, 2z)$$

och ytorna

$$\begin{aligned} S_1 &: \quad 4x^2 + (y-z)^2 = 16a^2 \\ S_2 &: \quad z = a \end{aligned}$$

är givna. Bestäm integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \times \mathbf{dr}$$

runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2.

7. Skärningskurvan C mellan ytorna S_1 och S_2,

$$\begin{aligned} S_1 &: \quad x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2, y < 0 \\ S_2 &: \quad x + 2y = 0 \end{aligned}$$

och det skalära fältet

$$\phi(x, y, z) = a^2 + x^2 + 4xy + 4y^2$$

är givna. Bestäm integralen

$$\int_C \phi \mathbf{dr}$$

om C genomlöps från punkten $(0, 0, -2a)$ till punkten $(0, 0, 2a)$.

Kapitel 3

Räkneregler för fältoperatorer

Det finns tre differentialoperatorer av första ordningen som verkar på skalära fält och vektorfält. Alla dessa operatorer kan uttryckas med hjälp av

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{3.1}$$

Operatorerna är:

Gradient:

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}\right). \tag{3.2}$$

Lägg märke till att gradienten tar ett argument, ϕ, som är ett skalärt fält och genererar ett vektorfält.

Divergens:

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}. \tag{3.3}$$

Lägg märke till att argumentet $\mathbf{F}$ är ett vektorfält, och att divergensen genererar ett skalärt fält ur detta vektorfält.

Rotation:

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{3.4}$$

Lägg märke till att rotationen tar ett argument $\mathbf{F}$, som är ett vektorfält och skapar ett nytt vektorfält.

Man kan nu bilda en ny differentialoperator som verkar på ett skalärt fält ϕ, genom att först konstruera vektorfältet $\nabla\phi$, och sedan beräkna divergensen av det nya fältet:

Laplace-operatorn:

$$\Delta\phi = \nabla^2\phi = \nabla\cdot\nabla\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{3.5}$$

Lägg märke till att Laplace-operatorn tar ett skalärfält och skapar ett nytt skalärfält.

Det går också att definiera en Laplace-operator för ett vektorfält, men denna skall användas med stor försiktighet eftersom den inte har någon enkel representation i något annat koordinatsystem, än kartesiska koordinater.

Laplace-operatorn för vektorfält:

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{F} =$$
$$\left(\frac{\partial^2 F_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_x}{\partial z^2}\right)\hat{\mathbf{x}} + \left(\frac{\partial^2 F_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_y}{\partial z^2}\right)\hat{\mathbf{y}}$$
$$+\left(\frac{\partial^2 F_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 F_z}{\partial z^2}\right)\hat{\mathbf{z}}. \tag{3.6}$$

Lägg märke till att operatorn genererar ett vektorfält från ett vektorfält.

Vi skall nu titta på några användbara räkneregler för dessa differentialoperatorer. När man räknar med dem är det viktigt att komma ihåg att alla termerna i ett uttryck måste vara av samma typ, det vill säga alla termerna skall vara antingen skalärer eller vektorer. Att kontrollera detta är lika viktigt som att kontrollera att alla termerna har samma enhet.

Räkneregler för gradienten:

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \tag{3.7}$$
$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A}) + \mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{3.8}$$
$$\tag{3.9}$$

där $(\mathbf{B}\cdot\nabla)$ skall tolkas som en ny operator

$$(\mathbf{B}\cdot\nabla) = B_x\frac{\partial}{\partial x} + B_y\frac{\partial}{\partial y} + B_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{3.10}$$

som verkar på var och en av komponenterna av $\mathbf{A}$.

Räkneregler för divergensen:

$$\nabla\cdot(f\mathbf{A}) = (\nabla f)\cdot\mathbf{A} + f(\nabla\cdot A) \tag{3.11}$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) - \mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B}) \tag{3.12}$$
$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{A}) = 0. \tag{3.13}$$

Räkneregler för rotationen:

$$\nabla\times(f\mathbf{A}) = (\nabla f)\times\mathbf{A} + f(\nabla\times\mathbf{A}) \tag{3.14}$$
$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = (\mathbf{B}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{B} + (\nabla\cdot B)A - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{B} \tag{3.15}$$
$$\nabla\times(\nabla f) = 0 \tag{3.16}$$

Exempel: Beräkna

$$\phi = \nabla\cdot\{\mathbf{r}\times[\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{r})]\}, \tag{3.17}$$

där $\mathbf{A}$ är en konstant och $\mathbf{r}$ är ortsvektorn.

Lösning: Vi börjar med den innersta parentesen och beräknar

$$\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{r}) = (\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A} - (\nabla\cdot\mathbf{A})\mathbf{r} - (\mathbf{A}\cdot\nabla)\mathbf{r} + (\nabla\cdot r)\mathbf{A}. \tag{3.18}$$

Eftersom $\mathbf{A}$ är konstant så är $(\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{A}$ och $\nabla\cdot\mathbf{A}$ båda 0. Om vi skriver ut $(\mathbf{A}\cdot\nabla)$ så får vi

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla) = \left(A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}\right). \tag{3.19}$$

Denna operator skall sedan verka på vektorn $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Då ser vi att den första komponenten i den nya vektorn blir A_x, ty

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial z} = 0. \tag{3.20}$$

På samma sätt blir de andra komponenterna A_y och A_z, det vill säga

$$(\mathbf{A} \cdot \nabla)\,\mathbf{r} = \mathbf{A}. \tag{3.21}$$

Å andra sidan så gäller det att

$$\nabla \cdot r = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3. \tag{3.22}$$

Allt detta ger oss tillsammans att

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r}) = -\mathbf{A} + 3\mathbf{A} = 2\mathbf{A}. \tag{3.23}$$

Nu beräknar vi det yttre uttrycket

$$\nabla \cdot \{\mathbf{r} \times 2\mathbf{A}) = 2\left[\mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{A})\right]. \tag{3.24}$$

Derivatan av en konstant är alltid 0, så $\nabla \times \mathbf{A} = 0$, och genom insättning kan vi lätt övertyga oss om att $\nabla \times \mathbf{r} = 0$. Det följer alltså att $\phi = 0$.

Övningsuppgifter

1. Beräkna vektorfältet $\mathbf{B} = \mathbf{r} \times \{\nabla \times [\mathbf{r} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r})]\}$ där $\mathbf{A}$ är en konstant vektor och $\mathbf{r}$ är ortsvektorn.

2. Det skalära fältet ϕ är givet

$$\phi(\mathbf{r}) = [\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{r})]^2 + \mathbf{r} \cdot [\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{r})],$$

   där $\mathbf{A}$ är en konstant vektor och $\mathbf{r}$ är ortsvektorn. Bestäm och beskriv dess nivåytor.

3. Om $\mathbf{r}$ är ortsvektorn, och $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ är konstanta vektorer förenkla så långt som möjligt uttrycket

$$\nabla \cdot [\mathbf{A} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{B})].$$

4. Funktionen $f(x)$ uppfyller differentialekvationen

$$\mathbf{r} \cdot \nabla f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}) = f(\mathbf{a} \cdot \mathbf{r}),$$

   där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor och $\mathbf{r}$ är otrsvektorn. Bestäm alla lösningar $f(x)$.

5. Den skalära funktionen $u(f)$ är given. Beräkna den skalära storheten $\mathbf{a} \cdot \nabla u(f)$, där $\mathbf{a}$ är en konstant vektor, $f = (\mathbf{a} \times \mathbf{r})^2$, samt $\mathbf{r}$ är ortsvektorn.

Kapitel 4

Kroklinjiga koordinater

4.1 Hur man konstruerar ett kroklinjigt koordinatsystem

I många fall kan det vara opraktiskt att arbeta med kartesiska koordinater. Låt oss anta att man av något skäl vill byta ut våra vanliga koordinater x, y, z till de nya koordinaterna u, v, w. Vi behöver då bestämma nya basvektorer, vilka kan bero på positionen $\mathbf{r}$ i rummet. Om vi kan skriva $\mathbf{r}(u, v, w)$, så kan vi börja med att bestämma tre tangentbasvektorer till koordinatsystemet som

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}, \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}, \ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}. \tag{4.1}$$

Dessa vektorer är i allmänhet inte ortonormala, men vi skall under kursen begränsa oss till koordinatsystem där basvektorerna är ortogonala mot varandra. För att hitta enhetsbasvektorer till det nya koordinatsystemet måste vi normera tangentbasvektorerna. Vi sätter därför vektorernas längder till

$$h_u = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right| \ \ h_v = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \ \ h_w = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|. \tag{4.2}$$

h_u, h_v och h_w kallar vi för skalfaktorer. Vi kan nu bilda enhetsbasvektorerna

$$\mathbf{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \ \ \mathbf{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \ \ \mathbf{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}. \tag{4.3}$$

Skalfaktorerna behöver vi sedan för att uttrycka bågelementet

$$\mathrm{d}s^2 = h_u^2 \mathrm{d}u^2 + h_v^2 \mathrm{d}v^2 + h_w^2 \mathrm{d}w^2. \tag{4.4}$$

och volymselementet

$$\mathrm{d}V = h_u h_v h_w \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w \tag{4.5}$$

i de kroklinjiga koordinaterna.

Exempel: Ett slags elliptiska cylinderkoordinater xuv ges av

$$x = x \tag{4.6}$$
$$y = a\cosh u \cos v \tag{4.7}$$
$$z = a \sinh u \sin v \tag{4.8}$$
$$\tag{4.9}$$

där $a > 0, -\infty < x < \infty, 0 \leq u < \infty, 0 \leq v < 2\pi$. Bestäm och beskriv dess koordinatytor, samt beräkna skalfaktorerna till systemet.

Lösning: Eftersom x-koordinaten är oförändrad räcker det att undersöka koordinatkurvor i yz-planet. Vi kan bilda en trigonometrisk etta genom att skriva

$$\left(\frac{y}{a\cosh u}\right)^2 + \left(\frac{z}{a\sinh u}\right)^2 = 1. \tag{4.10}$$

Detta är ekvationen för en ellips i yz-planet med centrum i $y = z = 0$ (x-axeln) och med halvaxlar $a\cosh u$ och $a\sinh u$. u-koordinatytorna är alltså elliptiska cylindrar.

Vi kan också bilda den hyperboliska ettan $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ genom att skriva

$$\left(\frac{y}{a\cos v}\right)^2 - \left(\frac{z}{a\sin v}\right)^2 = 1. \tag{4.11}$$

Detta är ekvationen för hyperbler i yz-planet. Hyperblerna har halvaxlar $a\cos v$ och $a\sin v$ och foki i $y = \pm a$. Alltså blir v-koordinatytorna hyperboliska cylindrar med x-axeln som axel. x-koordinatytorna är som vanligt plan parallella med yz-planet.

För att bestämma skalfaktorerna behöver vi tangentbasvektorerna

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} = (1, 0, 0) \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = (0, a\sinh u\cos v, a\cosh u\sin v) \tag{4.13}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (0, -a\cosh u\sin v, a\sinh u\cos v) \tag{4.14}$$

Det följer trivialt att $h_x = 1$.

$$h_u = \sqrt{(a\sinh u\cos v)^2 + (a\cosh u\sin v)^2} = a\sqrt{\left(\cosh^2 u - 1\right)\cos^2 v + \cosh^2 u\left(1 - \cos^2 v\right)} =$$
$$a\sqrt{\cosh^2 u\cos^2 v - \cos^2 v + \cosh^2 u - \cosh^2 u\cos^2 v} = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}, \tag{4.15}$$

och på samma sätt kan man visa att $h_v = h_u$. För att göra lösningen fullständig borde vi också visa att tangentbasvektorerna är ortogonala mot varandra, det vill säga att deras inbördes skalärprodukter är 0.

Övningsuppgifter

1. Paraboliska koordinater $uv\alpha$ definieras genom sambandet

$$\mathbf{r} = \left(uv\cos\alpha, uv\sin\alpha, \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right)\right),$$

   där $u \geq 0, v \geq 0, 0 \leq \alpha \leq 2\pi$. Beräkna tangentbasvektorerna till detta koordinatsystem.

2. Ett koordinatsystem (paraboliska koordinater) ges av sambanden

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2 u} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2 u} = 1$$
$$\frac{x^2}{a^2\cos^2 v} - \frac{y^2}{a^2\sin^2 v} = 1$$
$$\frac{z}{w} = 1$$

   där $0 \leq u < \infty, 0 \leq v < 2\pi$ och $-\infty < w < \infty$. Visa att systemet är ortogonalt och bestäm dess skalfaktorer.

3. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw definieras i övre halvplanet ($z \geq 0$) av

$$\begin{cases} x &=& 2u + v \\ y &=& u + \lambda v \\ z &=& w^2 \end{cases}$$

   Bestäm värdet på parametern λ för vilket systemet är ortogonalt och ge för detta fall ett uttryck för bågelementet. Uttryck ortsvektorn $\mathbf{r}$ i det ortogonala uvw systemets koordinater och basvektorer.

   (990922)

4. De paraboliska koordinaterna $uv\varphi$ definieras av sambandet

$$\mathbf{r} = \left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \frac{1}{2}\left(u^2 - v^2\right) \right)$$

där $0 \le u < \infty, 0 \le v < \infty$ och $0 \le \varphi < 2\pi$. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ är givet som

$$\mathbf{F} = \sqrt{u^2 + v^2}\sin\varphi\hat{\mathbf{u}} + \sqrt{u^2 + v^2}\cos\varphi\hat{\mathbf{v}},$$

där $\hat{\mathbf{u}}$ och $\hat{\mathbf{v}}$ är två enhetsbasvektorer i det paraboliska koordinatsystemet. Undersök om det finns någon fältlinje till vektorfältet $\mathbf{F}$ som går genom punkterna $\mathbf{r} = (1,0,0)$ och $\mathbf{r} = (-1,0,0)$.

(990407)

4.2 Differentialoperatorer i kroklinjiga koordinater

När vi vill uttrycka våra differentialoperatorer i det kroklinjiga koordinatsystemet behöver vi också använda skalfaktorerna. Det gäller att

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\hat{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\hat{\mathbf{u}}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\hat{\mathbf{u}}_3 \tag{4.16}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i}F_{u_i}\right) \tag{4.17}$$

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\hat{\mathbf{u}}_1 & h_2\hat{\mathbf{u}}_2 & h_3\hat{\mathbf{u}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1F_{u_1} & h_2F_{u_2} & h_3F_{u_3} \end{vmatrix} \tag{4.18}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\frac{h_1h_2h_3}{h_i^2}\frac{\partial\phi}{\partial u_i}\right) \tag{4.19}$$

Lägg märke till att det inte finns något enkelt uttryck för Laplace-operatorn för ett vektorfält, $\nabla^2\mathbf{F}$, annat än i kartesiska koordinater. Denna operator skall alltid beräknas ur sambandet

$$\nabla^2\mathbf{F} = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{F}\right) - \nabla\times\nabla\times\mathbf{F}. \tag{4.20}$$

Exempel: De elliptiska cylinderkoordinaterna uvz ges av

$$\begin{cases} x &= a\cosh u\cos v \\ y &= a\sinh u\sin v \\ z &= z \end{cases} \tag{4.21}$$

där $u \ge 0, 0 \le v \le 2\pi$ och $-\infty < z < \infty$. Beräkna skalfaktorerna och uttryck operatorerna $\nabla, \nabla\cdot, \nabla\times, \nabla^2$ i detta system.

Lösning: Tangentbasvektorer:

$$\begin{cases} \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} &= a\left(\sinh u\cos v, \cosh u\sin v, 0\right) \\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} &= a\left(-\cosh u\sin v, \sinh u\cos v, 0\right) \\ \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial z} &= (0,0,1) \end{cases} \tag{4.22}$$

Man kan sedan visa att dessa vektorer är ortogonala.

Skalfaktorerna blir nu

$$h_u = a\sqrt{\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v} =$$

$$a\sqrt{\sinh^2 u \left(1 - \sin^2 v\right) + \left(1 + \sinh^2 u\right)\sin^2 v} = a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v} \tag{4.23}$$

$$h_v = h_u \tag{4.24}$$

$$h_z = 1 \tag{4.25}$$

Differentialoperatorerna blir

$$\nabla\phi = \frac{1}{a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\hat{\mathbf{u}} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\hat{\mathbf{v}}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{4.26}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{a^2\left(\sinh^2 u + \sin^2 v\right)}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_u\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_v\right)\right] + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{4.27}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{a^2\left(\sinh^2 u + \sin^2 v\right)}\begin{vmatrix} a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}\,\hat{\mathbf{u}} & a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}\,\hat{\mathbf{v}} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial u} & \frac{\partial}{\partial v} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_u & a\sqrt{\sinh^2 u + \sin^2 v}A_v & A_z \end{vmatrix} \tag{4.28}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{a^2\left(\sinh^2 u + \sin^2 v\right)}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}. \tag{4.29}$$

Övningsuppgifter

1. Ett koordinatsystem (oblata sfäroidkoordinater) ges av sambanden

$$\begin{aligned} x &= a\sinh\xi\cos\eta \\ y &= a\cosh\xi\sin\eta\cos\varphi \\ z &= a\cosh\xi\sin\eta\sin\varphi \end{aligned}$$

där $0 \le \xi < \infty, 0 \le \eta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$. I detta system är det skalära fältet ϕ givet

$$\phi\left(\xi, \eta\varphi\right) = \phi_0\cosh^2\xi.$$

Beräkna $\nabla\phi$.

2. Ett koordinatsystem uvz är definierat genom

$$\begin{cases} x &= uv \\ y &= u^2 + \lambda v^2 \\ z &= z \end{cases}$$

där $u \ge 0$.

a) Bestäm λ så att koordinatsystemet blir ortogonalt, och beräkna systemets skalfaktorer. Är koordinatsystemet uvz ett höger- eller vänstersystem?

b) Använd resultatet i a) till att beräkna $\nabla\times\mathbf{F}$ där

$$\mathbf{F} = \frac{2u^2v\hat{\mathbf{u}} - uv^2\mathbf{v}}{\sqrt{4u^2 + v^2}}$$

(980817)

3. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw definieras av

$$\begin{cases} x &= \alpha e^{w}\cos v \\ y &= \beta e^{w}\sin v \\ z &= u \end{cases}$$

där α och β är reella konstanter. Bestäm en relation mellan α och β för vilken systemet är ortogonalt, och ge för detta fall ett uttryck för bågelementet $\mathrm{d}s^2$. Beräkna $\nabla^2 f$ där $f = uvw$.

(000426)

4. Ett koordinatsystem $uv\varphi$ ges av

$$\mathbf{r} = a\left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \frac{u^2 - v^2}{2}\right),$$

där $0 \leq u, v < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi$ och a är en konstant av dimension längd. Bestäm dess skalfaktorer och koordinatytor, samt ge Laplaces operator på ett skalärt fält uttryckt i dessa koordinater.

5. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av

$$\mathbf{r} = a\left(1 + u + e^{u}\cos v, v + e^{u}\sin v, w\right),$$

där $-\infty < u < \infty, -\pi \leq v < \pi, -\infty < w < \infty$ och a är en konstant av dimension längd. Visa att detta system är ortogonalt, bestäm Laplaces operator i systemet samt beskriv i grova drag hur en v-yta ser ut. Föreslå ett fysikaliskt problem till vilket detta koordinatsystem borde kunna användas.

6. **a**) Bestäm de normerade basvektorerna i det kroklinjiga koordinatsystemet

$$\begin{cases} u_1 &= x^2 - y^2 \\ u_2 &= xy \\ u_3 &= z \end{cases}$$

och visa att de är ortogonala.

b) Uttryck divergensen av ett vektorfält $\mathbf{A} = \mathbf{A}(u_1, u_2, u_3)$ i derivator av fältets komponenter längs dessa basvektorer. Svaret ska endast innehålla koordinaterna u_1, u_2 och u_3.

(000814)

7. De kroklinjiga koordinaterna u, v och w är definierade genom

$$\begin{cases} x &= a\cosh u\cos v \\ y &= a\sinh u\sin v \\ z &= w \end{cases}$$

a) Bestäm uvw-systemets basvektorer och skalfaktorer.

b) Hitta den lösning till ekvationen

$$\nabla^2\Phi = 0$$

som enbart beror på u, och vilken antar värdena 0 och 2 på ellipserna

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = \frac{a^2}{16} \text{ respektive } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = \frac{a^2}{9},$$

med $u \geq 0, 0 \leq v < 2\pi$.

8. Ett koordinatsystem $\alpha\beta\gamma$ definieras av sambandet

$$\mathbf{r} = c\left(\gamma, \alpha^2 - \beta^2, 2\alpha\beta\right),$$

där c är en positiv konstant av dimensionen längd. Beskriv systemets koordinatytor. Ge också uttrycken för bågelementet och Laplaces operator i detta koordinatsystem.

(990816)

4.3 Cylindriska och sfäriska koordinater

Det finns två kroklinjiga koordinatsystem som är speciellt viktiga. Dessa är de cylindriska och sfäriska koordinaterna.

Cylindriska koordinater:

$$\begin{cases} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{cases} \tag{4.30}$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial\rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{z}} \tag{4.31}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho A_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \tag{4.32}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix} \tag{4.33}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} \tag{4.34}$$

Sfäriska koordinater:

$$\begin{cases} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{cases} \tag{4.35}$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi} \tag{4.36}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} \tag{4.37}$$

$$\nabla\times\mathbf{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix} \tag{4.38}$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} \tag{4.39}$$

För båda koordinatsystemen beräknas $\nabla^2\mathbf{A}$ ur sambandet

$$\nabla^2\mathbf{A} = \nabla\left(\nabla\cdot\mathbf{A}\right) - \nabla\times\left(\nabla\times\mathbf{A}\right). \tag{4.40}$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater:

$$\mathbf{F} = \frac{r}{a}\left[2\hat{\mathbf{r}}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \hat{\theta}\sin 2\theta\cos^2\varphi - \hat{\varphi}\sin\theta\sin 2\varphi\right]. \tag{4.41}$$

Beräkna $\nabla\cdot\mathbf{F}$ och $\nabla\times\mathbf{F}$.

Lösning: Insättning i uttrycken ovan ger:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} =$$
$$\frac{1}{ar^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(2r^3\sin^2\theta\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(2\sin^2\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right) + \frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\sin\theta\sin 2\varphi\right)$$
$$= \frac{6}{a}\sin^2\theta\cos^2\varphi + \frac{\cos^2\varphi}{a\sin\theta}\left(4\sin\theta\cos^2\theta - 2\sin^3\theta\right) - \frac{1}{a}2\cos 2\varphi =$$
$$\frac{2}{a}\left[3\sin^2\theta\cos^2\varphi + \left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\cos^2\varphi - 2\cos^2\varphi + 1\right] = \frac{2}{a} \text{ ty } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta, \quad (4.42)$$

och

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{ar^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \hat{\mathbf{r}} & r\hat{\theta} & r\sin\theta\hat{\varphi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ 2r\sin^2\theta\cos^2\varphi & r^2\sin 2\theta\cos^2\varphi & -r^2\sin^2\theta\sin 2\varphi \end{vmatrix} =$$
$$\frac{1}{ar^2\sin\theta}\left[\hat{\mathbf{r}}\left(-2r^2\sin\theta\cos\theta\sin 2\varphi - 2r^2\sin 2\theta\cos\varphi\left(-\sin\varphi\right)\right) + \right.$$
$$r\hat{\theta}\left(4r\sin^2\theta\cos\varphi\left(-\sin\varphi\right) + 2r\sin^2\theta\sin 2\varphi\right) +$$
$$\left. r\sin\theta\hat{\varphi}\left(2r\sin 2\theta\cos^2\varphi - 4r\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi\right)\right] = 0 \quad (4.43)$$

En viktig tillämpning av differentialoperatorerna är vid integralberäkning medelst Gauss och Stokes satser. Det är viktigt i det här sammanhanget kunna känna igen de typer av singulariteter som normalt dyker upp i kurv- och yt-integraler. Det finns två typer av singulariteter som dyker upp i ytintegraler och en typ som dyker upp i kurvintegraler:

Punktkälla: I en ytintegral kan det dyka upp en singularitet av typen

$$\mathbf{F} = F_0\frac{a^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \quad (4.44)$$

I detta fall är fältet singulärt i origo, ($r = 0$), och har divergensen 0 utanför origo. Runt om origo pekar fältet radiellt utåt från origo. För att tillämpa Gauss sats på ett sådant fält så innesluter man origo med en sfär med radien ϵ.

Exempel: Beräkna normalytintegralen av

$$\mathbf{F} = F_0\frac{a^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\left(x, y, z + \frac{z}{a}\frac{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}{a^2}\right) \quad (4.45)$$

över ytan

$$x^2 + y^2 = (z - 3a)^2, \quad 0 \le z \le 3a. \quad (4.46)$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning: Vi vill beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}, \quad (4.47)$$

där ytan S är en kon runt z-axeln med spetsen i $z = 3a$, och dess bottenradie är $3a$. Vi antar att konen har en normalvektor som pekar ut från z-axeln.

Vi kan dela upp fältet $\mathbf{F}$ i två delar

$$\mathbf{F} = \sqrt{3}F_0\frac{a^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} + F_0\frac{z}{a}\hat{\mathbf{z}}. \quad (4.48)$$

Den första termen är singulär i origo och representerar en punktkälla där, men har därför också divergensen 0 utanför origo. Den andra termen är reguljär överallt och har divergensen

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial z}\left(F_0\frac{z}{a}\right) = \frac{F_0}{a}. \quad (4.49)$$

Vi kan nu kalla de båda delarna av fältet för $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$, respektive. Vi kan alltså dela upp integralen som

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} + \int_S \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{dS}, \tag{4.50}$$

och behandla de båda delarna separat.

Vi tar först den singulära delen $\mathbf{F_1}$. Här sluter vi ytan S genom att lägga till en bottenyta S_1, en cirkelskiva i xy-planet med radien $3a$, en normalvektor $-\hat{\mathbf{z}}$ och ett cirkulärt hål i centrum med radien ϵ. Kring själva singulariteten lägger vi in en halvsfär, S_ϵ med radien ϵ och med $z \geq 0$. S_ϵ har en normalvektor $-\hat{\mathbf{r}}$. På den slutna ytan som bildas av S, S_1 och S_ϵ kan vi nu tillämpa Gauss sats

$$\int_S \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_1} \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_\epsilon} \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F_1} \mathrm{d}V. \tag{4.51}$$

Eftersom divergensen av $\mathbf{F_1}$ är noll, så blir högerledet 0. I xy-planet är $\hat{\mathbf{r}}$ ortogonal mot $\hat{\mathbf{z}}$, vilket ger oss

$$\int_{S_1} \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_1} -\sqrt{3} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}S = 0. \tag{4.52}$$

Slutligen beräknar vi integralen över S_ϵ

$$\int_{S_\epsilon} \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_\epsilon} -\sqrt{3} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} \mathrm{d}S = -\sqrt{3} F_0 \frac{a^2}{\epsilon^2} \int_{S_\epsilon} \mathrm{d}S = -2\sqrt{3}\pi F_0 a^2, \tag{4.53}$$

ty $r = \epsilon$ på S_ϵ, och integralen i det näst sista ledet är halvsfärens area. Slutligen kan vi skriva integralen av $\mathbf{F_1}$ som

$$\int_S \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} = -\int_{S_\epsilon} \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} = 2\sqrt{3}\pi F_0 a^2. \tag{4.54}$$

Vi fortsätter nu med $\mathbf{F_2}$. I detta fall kan vi direkt sluta ytan genom att lägga till en cirkelskiva S_1 med radien $3a$ och utan något hål i centrum i xy-planet. Gauss sats ger oss då

$$\int_S \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_1} \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F_2} \mathrm{d}V = \frac{F_0}{a} \int_V \mathrm{d}V = \frac{F_0}{a} \frac{1}{3} \pi 9a^2 \times 3a = 9\pi F_0 a^2, \tag{4.55}$$

eftersom den sista integralen är konens volym. Det återstår nu att beräkna integralen över ytan S_1.

$$\int_{S_1} \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_1} -F_0 \frac{z}{a} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}S = 0, \tag{4.56}$$

ty $z = 0$ på S_1.

Slutligen har vi alltså för integralen över S

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S \mathbf{F_1} \cdot \mathbf{dS} + \int_S \mathbf{F_2} \cdot \mathbf{dS} = 2\sqrt{3}\pi F_0 a^2 + 9\pi F_0 a^2 = \pi F_0 a^2 \left(2\sqrt{3} + 9\right). \tag{4.57}$$

Linjekälla: I en ytintegral kan det dyka upp en singularitet av typen

$$\mathbf{F} = F_0 \frac{a}{\rho} \hat{\rho}. \tag{4.58}$$

Det här fältet är singulärt på hela z-axeln, och fältlinjerna pekar överallt ut från z-axeln. För att tillämpa Gauss sats, så innesluter man z-axeln med en cylinder med radien ϵ.

Exempel: Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}, \tag{4.59}$$

där fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \hat{\rho}, \tag{4.60}$$

och ytan S ges av

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad 0 \le z \le 4a. \tag{4.61}$$

F_0 och a är konstanter.

Lösning: Ytan S är en cylinder med radien a. Fältet $\mathbf{F}$ är singulärt på z-axeln ($\rho = 0$). Divergensen för fältet är

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = F_0 \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(a + \frac{\rho^3}{a^2} \right) = 3F_0 \frac{\rho}{a^2}. \tag{4.62}$$

Om vi antar att normalen till ytan S pekar utåt, så kan vi skära bort singulariteten genom att lägga till en cylinder, $_\epsilon$, med radien ϵ och normalvektorn $-\hat{\rho}$ kring z-axeln. För att sluta ytan lägger vi därtill till en botten S_- vid $z = 0$. S_- är en cirkelskiva med ytterradien a och ett centralt hål med radien ϵ. S_- har normalvektorn $-\hat{\mathbf{z}}$. På samma sätt lägger vi till ett lock vid $z = 4a$. Locket har normalvektorn $\hat{\mathbf{z}}$. Vi kan nu tillämpa Gauss sats

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V. \tag{4.63}$$

Vi börjar med volymsintegralen

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = \int_0^{4a} \int_0^{2\pi} \int_0^a 3F_0 \frac{\rho}{a^2} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z = 3F_0 \int_0^{4a} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^a \frac{\rho^2}{a^2} \mathrm{d}\rho =$$

$$3F_0 \times 4a \times 2\pi \left[\frac{\rho^3}{3a^2} \right]_0^a = 24\pi F_0 a \frac{a}{3} = 8\pi F_0 a^2. \tag{4.64}$$

Sedan konstaterar vi att $\hat{\rho}$ är ortogonal mot $\hat{\mathbf{z}}$, vilket leder till att

$$\int_{S_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 0. \tag{4.65}$$

eftersom S_- och S_+ har normalvektorerna $\mp \hat{\mathbf{z}}$. Slutligen återstår integralen över S_ϵ

$$\int_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_0^{4a} \int_0^{2\pi} F_0 \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho}{a} \right) \hat{\rho} \cdot (-\hat{\rho})\, \rho \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z. \tag{4.66}$$

Lägg märke till att $\rho = \epsilon$ på S_ϵ.

$$-F_0 \left(\frac{a}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{a} \right) \epsilon \int_0^{4a} \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = -F_0 \left(\frac{a}{\epsilon} + \frac{\epsilon}{a} \right) \epsilon \times 4a \times 2\pi \to -8\pi F_0 a^2 \tag{4.67}$$

då $\epsilon \to 0$. Därför får vi till slut

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V - \int_{S_-} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} - \int_{S_+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} - \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 8\pi F_0 a^2 + 8\pi F_0 a^2 = 16\pi F_0 a^2. \tag{4.68}$$

Virveltråd: I en kurvintegral kan det dyka upp en singularitet av typen

$$\mathbf{F} = F_0 \frac{a}{\rho} \hat{\varphi}. \tag{4.69}$$

Det här fältet är singulärt på hela z-axeln och fältlinjerna är koncentriska cirklar kring z-axeln. För att tillämpa Stokes sats lägger man in en liten cirkel med radien ϵ kring z-axeln.

Exempel: Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}, \tag{4.70}$$

där C är den slutna kurvan som bildas av skärningen mellan

$$z = \frac{x^2 + y^2}{4a} \tag{4.71}$$

och

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2, \tag{4.72}$$

och $\mathbf{F}$ är fältet

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho^2}{a^2} \right) \hat{\varphi}. \tag{4.73}$$

a och F_0 är konstanter.

Lösning: Vi bestämmer först skärningen mellan de båda ytorna. Ytorna i sig själva är en paraboloid och en sfär. Ersätt $x^2 + y^2$ i Ekv. (4.72) med uttrycket från Ekv. (4.71)

$$4az + z^2 = 9a^2. \tag{4.74}$$

Den här andragradsekvationen har lösningen

$$z = \left(-2 \pm \sqrt{13} \right) a, \tag{4.75}$$

där bara den positiva lösningen är meningsfull. Detta ger oss att skärningskurvan är en cirkel runt z-axeln med radien $2\sqrt{\sqrt{13} - 2}a$ vid $z = (\sqrt{13} - 2)a$.

Om vi studerar fältet $\mathbf{F}$, så ser vi att det är singulärt på z-axeln. Fältets rotation är

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left[F_0 \left(a + \frac{\rho^3}{a^2} \right) \right] \hat{\mathbf{z}} = 3F_0 \frac{\rho}{a^2} \hat{\mathbf{z}}. \tag{4.76}$$

Vi noterar nu att C är randen till en cirkelskiva, S, med normalen $\hat{\mathbf{z}}$. Om vi skär bort mittendelen av skivan genom att lägga in en cirkel, C_ϵ, med radien ϵ runt z-axeln, så kan vi sedan tillämpa Stokes sats. Lägg märke till orienteringen här; kurvan C har tangentvektorn $\hat{\varphi}$ och genomlöps i positiv riktning, vilket ger att normalvektorn till S är $\hat{\mathbf{z}}$, men då måste C_ϵ genomlöpas i negativ riktning och ha tangentvektorn $-\hat{\varphi}$. Stokes sats ger oss nu

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} + \oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}. \tag{4.77}$$

Vi börjar med att beräkna ytintegralen

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S 3F_0 \frac{\rho}{a^2} \hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{z}} \mathrm{d}S = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\sqrt{\sqrt{13}-2}a} 3F_0 \frac{\rho}{a^2} \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\varphi = 2\pi F_0 \left[\frac{\rho^3}{a^2} \right]_0^{2\sqrt{\sqrt{13}-2}a} = 16\pi F_0 a \left(\sqrt{13} - 2 \right)^{3/2} \tag{4.78}$$

Sedan tar vi integralen över C_ϵ

$$\oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \oint_{C_\epsilon} F_0 \left(\frac{a}{\rho} + \frac{\rho^2}{a^2} \right) (-\hat{\varphi} \cdot \hat{\varphi}) \, \mathrm{d}r. \tag{4.79}$$

Lägg märke till att $\rho = \epsilon$ längs hela C_ϵ

$$\oint_{C_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} -F_0 \left(\frac{a}{\epsilon} + \frac{\epsilon^2}{a^2} \right) \epsilon \mathrm{d}\varphi = -2\pi F_0 \left(a + \frac{\epsilon^3}{a^2} \right) \to -2\pi F_0 a \tag{4.80}$$

då $\epsilon \to 0$. Därmed ger oss Stokes sats att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = 16\pi F_0 a \left(\sqrt{13} - 2 \right)^{3/2} + 2\pi F_0 a = 2\pi F_0 a \left[8 \left(\sqrt{13} - 2 \right)^{3/2} + 1 \right]. \tag{4.81}$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i cylinderkoordinater

$$\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = F_0 \left[\left(\frac{\rho}{a} + \frac{a}{\rho} \right) (\hat{\rho} + \hat{\varphi}) + \frac{z}{a} \hat{\mathbf{z}} \right], \tag{4.82}$$

liksom ytan S,

$$S: \ \rho^2 + z^2 + 2az = 3a^2. \tag{4.83}$$

Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över S.

Lösning: I kartesiska koordinater kan ytans ekvation skrivas

$$\left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2a}\right)^2 + \left(\frac{z+a}{2a}\right)^2 = 1 \tag{4.84}$$

S är alltså en sfär med medelpunkt i $(0,0,-a)$ och radie $2a$. Vi ser att vektorfältet $\mathbf{F}$ är singulärt för $\rho = 0$, dvs på z-axeln. Vidare är

$$\nabla \cdot F = F_0 \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\rho^2}{a} + a\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\rho}{a} + \frac{a}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\frac{z}{a}\right] = \frac{3F_0}{a}. \tag{4.85}$$

Det bör alltså vara möjligt att använda Gauss sats, men området V innanför sfären innehåller z-axeln och alltså singulariteter för fältet. Vi skapar därför en volym V_ϵ genom att vi tar bort en cylinder med radien ϵ kring z-axeln. Om cylinderytan S_ϵ har en utåtriktad normal $\hat{\rho}$, så blir begränsningsytan för V_ϵ $S - S_\epsilon$, eftersom vi alltid använder den normal som pekar ut från volymen. Gauss sats ger då

$$\oint_{S-S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V. \tag{4.86}$$

Vår sökta integral är då gränsvärdet

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\int_{V_\epsilon} \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V + \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}\right] \tag{4.87}$$

Volymintegralen blir

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \mathrm{d}V = \frac{3F_0}{a}\frac{4\pi}{3}(2a)^3 = 32\pi F_0 a^2, \tag{4.88}$$

och ytintegralen blir

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{S_\epsilon} \mathbf{F} \cdot \hat{\rho} \mathrm{d}S = F_0 \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\epsilon}{a} + \frac{a}{\epsilon}\right) \int_{S_\epsilon} \mathrm{d}S = \\ F_0 \lim_{\epsilon \to 0} \left(\frac{\epsilon}{a} + \frac{a}{\epsilon}\right) 2\pi\epsilon\,(4a) = 8\pi F_0 a^2.\end{aligned} \tag{4.89}$$

Vi summerar nu ihop ekvationerna och får

$$\oint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = 40\pi F_0 a^2. \tag{4.90}$$

Exempel: Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = \frac{F_0}{arsin\theta}\Big[&\left(a^2 + ar\sin\theta\cos\varphi\right)\left(\sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\theta}\right) \\ &- \left(a^2 + ar\sin\theta\sin\varphi - r^2\sin^2\theta\right)\hat{\varphi}\Big],\end{aligned} \tag{4.91}$$

och kurvan C är skärningskurvan mellan ytorna S_1 och S_2:

$$S_1 \ : \ x^2 + 4y^2 = 12a^2 + 8ay \tag{4.92}$$

$$S_2 \ : \ x^2 + y^2 = 4az - 2ay - a^2 \tag{4.93}$$

$$\tag{4.94}$$

. Bestäm kurvintegralen av $\mathbf{F}$ längs C.

Lösning: Vi utnyttjar först att $\rho = r\sin\theta$ och $\hat{\rho} = \sin\theta\hat{\mathbf{r}} + \cos\theta\hat{\theta}$ för att uttrycka $\mathbf{F}$ i cylindriska koordinater

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a\rho}\left[\left(a^2 + a\rho\cos\varphi\right)\hat{\rho} - \left(a^2 + a\rho\sin\varphi - \rho^2\right)\hat{\varphi}\right]. \tag{4.95}$$

Vi kan dela upp $\mathbf{F}$ i en del som är singulär längs z-axeln, och en del som saknar en singularitet

$$\mathbf{F}_1 = \frac{F_0 a}{\rho}(\hat{\rho} - \hat{\varphi}) \tag{4.96}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_2 = F_0\left(\cos\varphi\hat{\rho} - \sin\varphi\hat{\varphi} + \frac{\rho}{a}\hat{\varphi}\right) = \\ F_0\left(\hat{\mathbf{x}} + \frac{\rho}{a}\hat{\varphi}\right),\end{aligned} \tag{4.97}$$

där vi har utnyttjat att $\hat{\mathbf{x}} = \cos\varphi\hat{\rho} - \sin\varphi\hat{\varphi}$. Vi kan nu beräkna rotationen för $\mathbf{F}_1$ och $\mathbf{F}_2$

$$\nabla \times \mathbf{F}_1 = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{aF_0}{\rho} & -aF_0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.98}$$

och

$$\nabla \times \mathbf{F}_2 = \nabla \times (F_0\hat{\mathbf{x}}) + \nabla \times \left(\frac{F_0\rho}{a}\hat{\varphi}\right) = 0 + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\frac{F_0\rho^2}{a}\hat{\mathbf{z}} = \frac{2F_0}{a}\hat{\mathbf{z}}. \tag{4.99}$$

Vi kan nu skriva om ytorna som

$$S_1 \quad : \quad \left(\frac{x}{4a}\right)^2 + \left(\frac{y-a}{2a}\right)^2 = 1 \tag{4.100}$$

$$S_2 \quad : \quad x^2 + (y+a)^2 = 4az. \tag{4.101}$$

$$\tag{4.102}$$

Vi ser att S_1 är en elliptisk cylinder med en symmetriaxel parallell med z-axeln, och som uppfyller $x = 0$ och $y = a$. Tvärsnittsytan har halvaxlarna $4a$ och $2a$. S_2 är en rotationsparaboloid med apex i $(0, -a, 0)$ och öppningen åt den positiva z-riktningen. Skärningskurvan C är då en sluten kurva längs den elliptiska cylinderns yta. z-koordinaten för C varierar längs med den elliptiska cylinderns, men projektionen av C på xy-planet är ellipsen C_1:

$$\left(\frac{x}{4a}\right)^2 + \left(\frac{y-a}{2a}\right)^2 = 1, \quad z = 0. \tag{4.103}$$

Vi kan nu tillämpa Stokes sats på den del av cylindern som begränsas av kurvorna C och C_1 (lägg märke till att om C här genomlöps i positiv riktning, så genomlöps C_1 i negativ riktning)

$$\oint_{C-C_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_{S'} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = 0, \tag{4.104}$$

ty $\nabla\times\mathbf{F}$ är parallell med $\hat{\mathbf{z}}$ och därmed ortogonal mot ytan S' som begränsas av C och C_1. Nu betraktar vi ytan S'', som begränsas av C_1 och en liten cirkel C_ϵ med centrum i origo och med radien ϵ. Vi beräknar då integralen

$$\oint_{C_1-C_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr}. \tag{4.105}$$

Den här gången följer vi C_1 i den positiva riktningen och C_ϵ i den negativa riktningen. Om vi tillämpar Stokes sats får vi

$$\oint_{C_1-C_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_{S''} \nabla\times\mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \frac{2F_0}{a}\left(8\pi a^2 - \pi\epsilon^2\right), \tag{4.106}$$

där den första termen kommer från ellipsens area, och den andra representerar arean av den lilla cirkel som omsluts av C_ϵ. Vi kan nu till slut beräkna integralen

$$\oint_{C_\epsilon} \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}\cdot\hat{\varphi}\epsilon \mathrm{d}\varphi = -2\pi\frac{F_0}{a}\left(a^2 - \epsilon^2\right). \tag{4.107}$$

Lägg märke till att termen med $\sin\varphi$ blir 0 när vi integrerar. Vi kan nu skriva vår ursprungliga integral som

$$\begin{aligned}\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} &= \oint_{C-C_1}\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \oint_{C_1-C_\epsilon}\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} + \oint_{C_\epsilon}\mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} \\ &= 0 + \frac{2F_0}{a}\left(8\pi a^2 - \pi\epsilon^2\right) - \frac{F_0}{2\pi a}\left(a^2-\epsilon^2\right),\end{aligned} \tag{4.108}$$

och om vi låter $\epsilon \to 0$ så får vi

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{dr} = 16\pi a F_0 - 2\pi a F_0 = 14\pi a F_0. \tag{4.109}$$

Eftersom vi inte har specificerat riktningen på C, så hade också $-14\pi a F_0$ varit ett korrekt svar.

Övningsuppgifter

De första uppgifterna här är rena tillämpningar på differentialoperatorerna i kroklinjiga koordinater. Sedan följer några integraluppgifter med ledningar, och till slut kommer det svårare integraluppgifter utan ledningar.

1. Det skalära fältet ϕ är givet i cylinderkoordinater:

   $$\phi(\rho,\varphi,z) = \phi_0\left[2\alpha + \exp\left(-3\frac{z^2}{a^2}\right) - 5\frac{\rho}{a}\sin\varphi\right].$$

   Beräkna $\nabla^2\phi(\rho,\varphi,z)$.

2. Vektorfältet $\mathbf{B}$ är givet i sfäriska koordinater:

   $$\mathbf{B}(r,\theta,\varphi) = 2r\cos^2\theta\hat{\mathbf{r}} - r\sin 2\theta\hat{\theta} + r\sin\theta\hat{\varphi}.$$

   Beräkna $\nabla\cdot\mathbf{B}, \nabla\times\mathbf{B}$ och $\nabla^{\mathbf{2}}\mathbf{B}$.

3. Temperaturfördelningen i ett område kring en punkt P i ett skiktat material med en värmekälla i origo beskrivs av skalärfältet

   $$T = \frac{2+\cos\theta}{r^2}$$

   där P har de sfäriska koordinaterna $r = 2, \theta = \pi/2, \varphi = \pi/4$.

   a). Hur snabbt ökar temperaturen då man utgår från P i riktningen $\hat{\mathbf{r}} + \hat{\varphi}$?

   b). I vilken riktning utgående från P ökar temperaturen snabbast och hur stor är den maximala temperaturökningen per längdenhet?

   (991130)

4. Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i sfäriska koordinater:

   $$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = F_0\left(\frac{a}{r}\right)^3\left(2sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{r}} - \cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} + \sin\varphi\hat{\varphi}\right)$$

   Beräkna $\nabla\cdot\mathbf{F}$ och $\nabla\times\mathbf{F}$.

   (981005)

5. Differentialekvationen

   $$\mathbf{r}\cdot[\nabla\phi(r)] = \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$$

   är given. Vilka funktioner $\phi(r)$ löser den?

6. Ett kroklinjigt koordinatsystem uvw ges av sambandet

$$\begin{cases} u &= r\,(1-\cos\theta) \\ v &= r\,(1+\cos\theta) \\ w &= \varphi \end{cases}$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater. Visa att systemet är ortogonalt och beräkna dess skalfaktorer. Hur ser (i) gradientoperatorn ∇ och (ii) ortsvektorn $\mathbf{r}$ ut i uvw-systemet?

(991107)

7. Vektorfältet

$$\frac{\hat{\rho}}{\rho}+\frac{\hat{\varphi}}{\rho}+z\hat{\mathbf{z}}$$

och den koniska ytan

$$S:\ \ \rho+z=2\ \ -1<z<2$$

är givna. Bestäm normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}.$$

Ledning: $\frac{\hat{\rho}}{\rho}$ bidrar med 6π. $\frac{\hat{\varphi}}{\rho}$ bidrar ej. Slut med en cirkelplatta, S_2 vid $z=-1$. $\nabla\cdot(z\hat{\mathbf{z}})=1$. $\int_{S_2}=-9\pi$, $\int_V=9\pi$.

8. Låt S vara ytan $\rho+z=a, z>0$. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{dS}\times(\mathbf{r}+a\hat{\rho}-a\hat{\varphi})\,,$$

där $\rho\varphi z$ är cirkulära cylinderkoordinater.

9. Vektorfältet $\mathbf{A}$ och ytan S är givna i cylinderkoordinater $\rho\varphi z$:

$$\mathbf{A}(\rho,\varphi,z)=A_0\left[\left(\frac{a}{\rho}+\frac{2\rho}{a}\cos^2\varphi\right)\hat{\rho}-\frac{\rho}{a}\sin 2\varphi\hat{\varphi}-\frac{z}{a}\hat{\mathbf{z}}\right]$$

$$S:\ \rho^2-2a\rho\cos\varphi-3a^2=0,\ \ 0<z<a.$$

Bestäm normalytintegralen av $\mathbf{A}$ över S.

10. Paraboliska koordinater $uv\varphi$ definieras genom avbildningen

$$\mathbf{r}=\left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \left(u^2-v^2\right)/2\right),\ \ u\geq 0,\ v\geq 0,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi.$$

I detta koordinatsystem är givet dels en sluten yta S med ekvationen

$$u^4+v^4+u^2v^2=1$$

och dels ett vektorfält $\mathbf{F}$ genom sin skalärpotential ϕ:

$$\phi(u,v,\varphi)=\left(u^2-1\right)^2+\left(v^2+1\right)^2+2uv\left(\sin\varphi+uv\right)+\left(u^2+v^2\right)^{-1}.$$

Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut genom ytan S.

(000426)

11. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ kan sönderläggas i två delar, $\mathbf{F} = \mathbf{F_1} + \mathbf{F_2}$, där $\mathbf{F}_1$ har skalärpotentialen

$$\phi_1 = \frac{1}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2}} + xy^3,$$

och där $\mathbf{F}_2$ enklast beskrivs i ett cylindriskt koordinatsystem som

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\rho^2 - az}{\rho}\hat{\rho},$$

där a är en konstant. Beräkna flödet av vektorfältet $\mathbf{F}$ ut ur en sfär med radien 3 och medelpunkten i $\mathbf{r} = (2, 1, 1)$.

(991030)

12. Vektorfältet $\mathbf{A}$ och ytan S är givna i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$:

$$\mathbf{A}(r, \theta, \varphi) = A_0 \left[\hat{\mathbf{r}} \left(\frac{a}{r} + \frac{2r}{a} \cos^2 \theta \right) + \hat{\theta} \left(\frac{a}{r} \cot \theta - \frac{r}{a} \sin 2\theta \right) \right]$$

$$S : \ r^2 \left(1 + \cos^2 \theta\right) = 2a^2.$$

Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{A}$ över S.

13. Vektorfältet

$$\mathbf{F}(r, \theta\varphi) = \left(\frac{r}{a}\right)^3 \hat{\mathbf{r}} + \left(1 + \frac{a}{r \sin \theta}\right) \hat{\varphi},$$

där $r\theta\varphi$ är sfäriska koordinater, och ytorna S_1 och S_2,

$$S_1 : \ x^2 + y^2 = 4a^2$$

$$S_2 : \ x^2 + (y+a)^2 + z^2 = 9a^2, \ \ z > 0,$$

är givna. Bestäm tangentlinjeintegralen av $\mathbf{F}$ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2.

14. En volym begränsas av hyperboloiden $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ och planen $z = -a$ och $z = 2a$. Beräkna

$$\int \mathbf{A} \cdot \mathbf{dS}$$

över begränsningsytan om

$$\mathbf{A} = \frac{xz}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{x}} + \frac{yz}{x^2 + y^2}\hat{\mathbf{y}}.$$

15. Vektorfältet

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \left(-6a^2 x, -6a^2 y, \left(x^2 + y^2\right)(z + a)\right)$$

och halvellipsoiden S,

$$S : \ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2, z > 0$$

är givna. Bestäm normalytintegralen av $\mathbf{B}$ över den buktiga ytan S.

16. Vektorfältet $\mathbf{F}(r, \theta, \varphi) = F_0(a^{-1} r \sin 2\theta \sin \varphi \hat{\mathbf{r}} - 2a^{-1} r \sin^2 \theta \sin \varphi \hat{\theta} - (2r \sin \theta)^{-1} a \hat{\varphi})$ är givet i sfäriska koordinater, med a en konstant med dimensionen längd. Beräkna tangentlinjeintegralen av $\mathbf{F}$ längs skärningskurvan C mellan ytorna S_1 och S_2

$$S_1 : \ \ x^2 + y^2 + z^2 = 25a^2, \ \ x \geq 0$$

$$S_2 : \ \ 16x - 12y - 9z = 0$$

från punkten $(0, -3a, 4a)$ till punkten $(0, 3a, -4a)$.

(000814)

17. En s.k. *elektrisk kvadrupol* i origo ger upphov till vektorfältet

$$\mathbf{E} = \frac{3\cos^2\theta - 1}{r^4}\hat{\mathbf{r}} + \frac{\sin 2\theta}{r^4}\hat{\theta}$$

med r och θ sfäriska koordinater. Beräkna flödet av detta fält ut genom den cylindriska burk som avgränsas av ytorna

$$x^2 + y^2 = 1, \;\; z = 1, \;\; z = -1.$$

Ledning: Gauss sats kan användas överallt där fältet är ändligt och deriverbart, dvs för $r \neq 0$. Kvadrupolfältet är ett viktigt exempel på ett *multipolfält.*

(990922)

18. Ett vektorfält har potentialen ϕ, given i cylinderkoordinater $\rho\varphi z$ som

$$\phi = \left(\frac{a}{\rho} + b\rho\right)\sin\varphi,$$

där a och b är konstanter. Beräkna vektorfältets flöde ut genom begränsningsytan till kuben med sidan c och mittpunkt i $(x, y, z) = (0, d, 0)$ där $c < d$.

(990407)

19. Det skalära fältet ϕ

$$\phi\left(\rho, \varphi, z\right) = \rho\sin\varphi + z^3$$

och ytorna S_1 och S_2

$$S_1 : \; \rho^2 - z^2 = 1, \;\; z > 0 S_2 : \; 3\rho^2 + z^2 = 7$$

är givna i cylinderkoordinater $\rho\varphi z$. Bestäm integralen $\oint_C \mathbf{dr}\phi$ av ϕ runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2.

(990407)

20. Vektorfältet $\mathbf{F}$ är givet i cylinderkoordinater $\rho\varphi z$:

$$\mathbf{F}\left(\rho, \varphi, z\right) = F_0 a \frac{1}{\rho^2 + a^2 + 2a\rho\cos\varphi}\left[\left(\rho + a\cos\varphi\right)\hat{\rho} - a\sin\varphi\hat{\varphi}\right]$$

Beräkna normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över sfären med radie a och centrum i punkten $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$.

(981107)

21. Vektorfältet $\mathbf{F}$ med vektorpotentialen $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \frac{\rho}{a}\sin\left(2\varphi\right)\hat{\varphi} - \left(\frac{2\rho}{a}\sin^2\varphi + \frac{z}{\rho}\right)\hat{\varphi} + \ln\frac{\rho}{a}\hat{\mathbf{z}}$$

och ytan S

$$S : \; \rho + 2z = 2b, \;\; 0 < z < b$$

är givna i cylinderkoordinater (ρ, φ, z), med a och b konstanter. Beräkna normalytintegralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS}.$$

(981005)

22. Vektorfältet $\mathbf{F}$ och ytorna S_1 och S_2 är givna i sfäriska koordinater $r\theta\varphi$:

$$\mathbf{F}(r,\theta,\varphi) = F_0\left[\left(\frac{r^3}{a^3}\sin^2\theta\cos\theta + \frac{a}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} + \frac{a}{r}\cot\theta\hat{\theta} + \frac{a}{r\sin\theta}\hat{\varphi}\right] \quad \begin{cases} S_1: & \left(\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{r}{a} & = & 7 - 2\cos\theta \\ S_2: & \left(\frac{r}{a}\right)^2 - 3\frac{r}{a} & = & 4\cos\theta - 4 \end{cases}$$

där F_0 och $a > 0$ är konstanter. Bestäm linjeintegralen

$$\oint_C \mathbf{F} \times \mathbf{dr}$$

runt skärningskurvan C mellan S_1 och S_2.
(980817)

Kapitel 5

Värmeledning

5.1 Värmeledningsekvationen

Enligt Fouriers lag såuppstår det i ett varmt material en energiström $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$, där λ är en materialkonstant. Divergensen av värmeströmmen bestämmer hur snabbt ett volymselement kyls av. Detta ger oss värmeledningsekvationen

$$\frac{\lambda}{c\rho}\nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}, \tag{5.1}$$

där c är materialets värmekapacitivitet, och ρ dess densitet. Vi kan här notera att i det tidsoberoende fallet, så bestäms temperaturfördelningen av $\nabla^2 T = 0$. I händelse av att materialet innehåller en värmekälla q, så lägger vi till denna i vänsterledet

$$\frac{\lambda}{c\rho}\nabla^2 T + \frac{q}{c\rho} = \frac{\partial T}{\partial t}.$$

Exempel: Granitberggrunden i Sverige innehåller en viss mängd radium, vars radioaktiva sönderfall ger en uppvärming som av en rymdkälla för värme med konstant källtäthet ρ_T. Granitens värmeledningsförmåga är λ (i $\mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$). Låt oss göra det orealistiska antagandet att Jorden alltigenom bestod av granit med dessa egenskaper. Hur skulle i så fall den stationära temperaturfördelningen i Jordens inre se ut? Vad blir temperaturen i centrum?

Lösning: Vi kan ställa upp differentialekvationen

$$\nabla^2 T = -\frac{\rho_{\mathrm{T}}}{\lambda} \tag{5.2}$$

I sfäriska koordinater under antagande om sfärisk symmetri blir ekvationen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -Q, \tag{5.3}$$

där $Q = \rho_{\mathrm{T}}/\lambda$. Vi kan skriva detta som

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -Qr^2, \tag{5.4}$$

och sedan integrera en gång.

$$r^2\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr^3 + A, \tag{5.5}$$

där A är en integrationsvariabel. Om vi dividerar med r^2 får vi

$$\frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{1}{3}Qr + \frac{A}{r^2}. \tag{5.6}$$

Integrerar vi än en gång får vi

$$T\left(r\right)=-\frac{1}{6}Qr^2-\frac{A}{r}+B, \tag{5.7}$$

där B är ännu en integrationsvariabel. Vi måste nu bestämma värden på de båda integrationsvariablerna. Först kan vi notera att temperaturen inte bör bli oändlig i Jordens inre, så $A=0$. För det andra noterar vi att temperaturen vid jordytan, $r=R$, är praktiskt taget 0 jämfört med temperaturen i Jordens centrum, så vi får ekvationen

$$0=-\frac{1}{6}QR^2+B. \tag{5.8}$$

vilket ger $B=QR^2/6$. Fysikaliskt så är B temperaturen i Jordens centrum. Om vi sätter in realistiska värden på $\rho_{\mathrm{T}}=5\times10^{-8}\ \mathrm{W\,m^{-3}}$, $\lambda=3,5\ \mathrm{W\,m^{-1}\,K^{-1}}$ och $R=6,4\times10^6$ m, så får vi $B=10^5$ K, vilket är en grov överskattning av den verkliga temperaturen.

Exempel: Ytan av ett klot med radien a hålls vid temperaturen $T_0(1+cos\theta)$. Bestäm temperaturfördelningen inuti klotet.

Lösning: Temperaturfördelningen ges av ekvationen $\nabla^2T=0$. Vi ansätter en lösning på formen $f(r)+g(r)\cos\theta$ och sätter in denna i ekvationen

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}=0, \tag{5.9}$$

och får

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f\left(r\right)}{\mathrm{d}r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}g\left(r\right)}{\mathrm{d}r}\right)\cos\theta+\frac{g\left(r\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=0. \tag{5.10}$$

Ekvationen måste vara uppfylld för alla θ, vilket tillåter oss att dela upp den på två ekvationer.

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f\left(r\right)}{\mathrm{d}r}\right)=0 \tag{5.11}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}g\left(r\right)}{\mathrm{d}r}\right)\cos\theta+\frac{g\left(r\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)=0. \tag{5.12}$$

Den första ekvationen kan vi integrera en första gång

$$r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}=A. \tag{5.13}$$

Division med r^2 och en andra integration ger oss

$$f\left(r\right)=-\frac{A}{r}+B. \tag{5.14}$$

Vi kan nu förenkla den andra ekvationen

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}g\left(r\right)}{\mathrm{d}r}\right)\cos\theta+\frac{g\left(r\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\right)&=\\ \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}+r^2\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}r^2}\right)\cos\theta+\frac{g}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(-\sin^2\theta\right)=\left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\right)\cos\theta-\frac{2g\sin\theta\cos\theta}{r^2\sin\theta}&=\\ \left(\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}-\frac{2g}{r^2}\right)\cos\theta&=0.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Vi kan nu lösa ekvationen

$$\frac{\mathrm{d}^2g}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}-\frac{2g}{r^2}=0 \tag{5.16}$$

genom att ansätta $g(r) = Cr^{\nu}$, som efter insättning och förkortning ger

$$\nu(\nu-1) + 2\nu - 2 = \nu^2 + \nu - 2 = 0, \tag{5.17}$$

som har lösningarna $\nu = 1$ och $\nu = -2$.

Vi har nu kommit fram till att den allmänna lösningen till Laplace-ekvationen måste vara

$$T(r) = -\frac{A}{r} + B + \left(\frac{C}{r^2} + Dr\right)\cos\theta. \tag{5.18}$$

Temperaturen kan inte vara oändlig i någon punkt, så $A = C = 0$. Vi kan bestämma de återstående konstanterna genom randvillkoret vid $r = a$

$$B + Da\cos\theta = T_0(1 + \cos\theta), \tag{5.19}$$

vilket ger $B = T_0$ och $D = T_0/a$. Vår lösning blir alltså till slut

$$T(r) = T_0\left(1 + \frac{r}{a}\cos\theta\right). \tag{5.20}$$

Övningsuppgifter

1. En platta av stor utsträckning begränsas av planen $x = 0$ och $x = d$ (där d är plattans tjocklek). Motsvarande begränsningsytor hålls vid konstanta temperaturer T_0 respektive T_d. Bestäm temperaturfördelningen i plattans inre, där Laplaces ekvation $\nabla^2 T = 0$ gäller.

   (991130)

2. Ett kompositmaterial med värmeledningsförmågan λ [W/mK] innehåller en radioaktiv isotop vars sönderfall ger en uppvärmning som av en värmekälla med en konstant rymdkälltäthet ρ_0 [W/m^3]. Ett stycke av materialet formas till en sfär med radien a och och kopplas till en termostat vilken reglerar temperaturfördelningen T vid ytskiktet så att denna uppfyller

   $$T(a,\theta,\varphi) = T_0\left(1 + \frac{1}{2}\cos\theta\right),$$

   där θ och φ är sfäriska vinkelkoordinater. Bestäm temperaturfördelningen inuti sfären.

   (981107)

3. Ett sfäriskt skal tillförs en konstant värmeeffekt W_0 genom den inre ytan $r = a$ och avkyls enligt Newtons avkylningslag

   $$\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J} = \alpha(T - T_0)$$

   genom den yttre ytan $r = b$, där α och T_0 är givna konstanter. Skalet antas homogent med konstant värmeledningsförmåga λ och problemställningen sfäriskt symmetrisk. Bestäm temperaturen överallt i skalet.

Kapitel 6

Elektromagnetiska fält

6.1 Potentialteori

Elektromagnetiska fält beskrivs av Maxwells ekvationer:

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \tag{6.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \tag{6.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \tag{6.3}$$

$$\nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu} = \mathbf{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon E) . \tag{6.4}$$

Man behöver sedan komplettera Maxwells ekvationer med en ekvation som ger ett samband mellan det elektriska fältet $\mathbf{E}$ och strömtätheten $\mathbf{J}$. För ett statiskt medium kan Ohms lag skrivas som

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \tag{6.5}$$

där σ är den elektriska konduktiviteten.

Det kan verka vara en formidabel uppgift att lösa Maxwells ekvationer, men i vissa fall kan ekvationerna förenklas genom att man inför nya fält, som kommer att beskrivas av standardekvationer vilka kan lösas med kända metoder. Det finns två typer av omskrivningar som är särskilt viktiga.

Ett fält $\mathbf{F}$ som har $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ kan alltid skrivas som gradienten av en skalär potential ϕ. I elektromagnetism skriver vi oftast

$$-\nabla \phi = \mathbf{F}. \tag{6.6}$$

Lägg märke till att potentialen ϕ inte är entydigt bestämd. En potential $\phi' = \phi + C$, där C är en konstant ger samma $\mathbf{F}$ som vår ursprungliga potential.

Om vi å andra sidan har ett fält $\mathbf{B}$ sådant att $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, såfinns det istället alltid en vektorpotential $\mathbf{A}$ sådan att

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \tag{6.7}$$

Inte heller vektorpotentialen är entydigt bestämd, ty vi kan skapa en ny potential $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$, som ger upphov till samma fält $\mathbf{B}$ eftersom $\nabla \times \nabla f = 0$.

Enligt Maxwells ekvationer finns det alltid ett vektorfält $\mathbf{A}$ som genererar magnetfältet $\mathbf{B}$. Det elektriska fältet $\mathbf{E}$ är något mer komplicerat. Om alla fält är tidsoberoende, så gäller det att $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, och det finns då en potential ϕ sådan att $-\nabla \phi = \mathbf{E}$. I det allmänna tidsberoende fallet får vi istället skriva

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \tag{6.8}$$

Den sista ekvationen visar på en allmän egenskap för alla vektorfält; ett vektorfält $\mathbf{F}$ kan alltid delas upp i en del som är rotationsfri, $\nabla \times \mathbf{F_1} = 0$, och en del som är divergensfri $\nabla \times \mathbf{F_2} = 0$.

Om vi nu antar att fälten är tidsoberoende, så kan vi skriva $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ och sätta in detta uttryck i Ekv. (6.1). Förutsatt att ϵ är konstant får vi

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \tag{6.9}$$

som är en Poisson-ekvation liknande dem vi stötte på i värmeledningsproblemen. Sålunda kan vi beräkna potentialen, och därmed **E**-fältet, för en godtycklig laddningsfördelning.

Exempel: Inuti en jordad metallsfär med radien a befinner sig en rymdladdning $\rho(r,\theta,\varphi) = \rho_0 \cos\theta$. Bestäm potentialen i sfären.

Lösning: För potentialen i sfären gäller Poissons ekvation

$$\nabla^2\phi = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\cos\theta. \tag{6.10}$$

Det faktum att sfären är jordad ger oss randvillkoret

$$\phi\left(a,\theta,\varphi\right) = 0. \tag{6.11}$$

Vi ansätter nu en lösning påformen

$$\phi\left(r,\theta,\varphi\right) = f\left(r\right) + g\left(r\right)\cos\theta \tag{6.12}$$

På samma sätt som i värmeledningsproblemet kan vi dela upp det på två ordinära differentialekvationer

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \tag{6.13}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}r}\right)\cos\theta + \frac{g\left(r\right)}{r^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\cos\theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}\cos\theta \tag{6.14}$$

f har samma lösning som i det tidigare fallet

$$f\left(r\right) = -\frac{A}{r} + B. \tag{6.15}$$

Lösningen för g blir något mer komplicerad än tidigare, eftersom vi måste lägga till en partikulärlösning

$$-\frac{\rho_0}{4\epsilon_0}r^2 \tag{6.16}$$

och den totala lösningen för g blir

$$g\left(r\right) = \frac{C}{r^2} + Dr - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}r^2. \tag{6.17}$$

Nu sätter vi först $A = C = 0$, så att lösningen inte blir singulär i origo. Sedan tillämpar vi vårt randvillkor att $\phi(a,\theta,\varphi) = 0$. Detta ger först att $B = 0$. Det ger också ekvationen

$$Da - \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}a^2 = 0, \tag{6.18}$$

som till sist ger

$$D = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}a. \tag{6.19}$$

Potentialen blir därför

$$\phi\left(r,\theta,\varphi\right) = \frac{\rho_0}{4\epsilon_0}\left(a-r\right)r\cos\theta. \tag{6.20}$$

I vissa fall kan man istället utnyttja integralformen av Ekv. (6.1). Gauss lag på integralform blir

$$\oint_S \epsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \rho \mathrm{d}V = Q, \tag{6.21}$$

där Q alltså är den laddning som innesluts av ytan S.

Exempel: En sfärisk symmetrisk laddningsfördelning består av två delar: En rymdladdning $\rho(r) = \rho_0$ för $r < a/2$ och en ytladdning $\sigma = -\rho_0 a/24$ för $r = a$.

Lösning: Den totala positiva laddningen är $\pi a^3 \rho_0/6$ och den totala negativa laddningen är $-\pi a^3 \rho/6$. Det finns därför ingen nettoladdning, och därmed blir $\mathbf{E} = 0$ för $r > a$. Om vi tillämpar Gauss lag på en sfärisk yta med en radie r sådan att $a/2 < r < a$ följer att

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r) = \frac{\pi a^3 \rho_0}{6} \tag{6.22}$$

så att

$$E_r(r) = \frac{a^3 \rho_0}{24 \epsilon_0 r^2} \tag{6.23}$$

För $r < a/2$ får vi istället

$$4\pi r^2 \epsilon_0 E_r(r) = \frac{4\pi}{3} r^3 \rho_0, \tag{6.24}$$

så att

$$E_r(r) = \frac{r \rho_0}{3 \epsilon_0} \tag{6.25}$$

Övningsuppgifter

1. Mellan två koncentriska, perfekt ledande sfärer med radierna a och b finns ett homogent, isotropt medium med ledningsförmågan σ =konstant. En likströmsgenerator som ger en konstant spänning V ansluts till den inre sfären och den yttre sfären jordas. Modellera potential- och strömtäthetsfälten ϕ respektive $\mathbf{J}$ mellan sfärerna. Sambandet mellan dessa fält är $\mathbf{J} = -\sigma \nabla \phi$.

   Ledning: Strömmen är densamma genom alla sfärer $r = R, \ \ a \le R \le b$.

2. Två koncentriska sfärer med radierna a och $2a$ har laddningarna $-2Q$, respektive Q, sfäriskt symmetriskt fördelade över respektive sfär. Bestäm den elektriska fältstyrkan och dess potential från denna laddningsfördelning överallt i rummet.

3. Bestäm $\mathbf{E}$-fältet överallt i rummet från en sfäriskt symmetrisk laddningsfördelning bestående av två delar, nämligen en rymdladdning $\rho(r) = \rho_0$ för $r < a/2$ och $\rho = 0$ för $r > a/2$ och en ytladdning $\sigma = -\rho_0 a/24$ på sfären $r = a$.

4. Antag att sfären $r = a$ innehåller en rymdladdning Q fördelad med konstant täthet inuti sfären, samt att det sfäriska skalet mellan $r = a$ och $r = 2a$ har laddningen $-Q$, också fördelad som en rymdladdning med konstant täthet. Det hela befinner sig i vakuum, långt från andra laddningar. Bestäm den elektriska fältstyrkan överallt kring laddningarna.

5. En sfäriskt symmetrisk rymdladdning i en sfär är koncentrerad mot centrum enligt

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0 \frac{a}{r} & \text{för} \quad r < a \\ 0 & \text{för} \quad r > a \end{cases}$$

   Trots singulariteten i origo är den totala laddningen $Q = \int \rho(r) \mathrm{d}V$ begränsad. Bestäm den elektriska fältstyrkan från denna laddning överallt i rummet. Kommentera speciellt dess uppförande i origo.

6. I sfären $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten $\rho = \rho_0 (r/a)^2$ och på sfären gäller att potentialen är
$$\phi(a, \theta) = \phi_0 \cos\theta.$$
Bestäm ϕ i sfären.

7. I sfären $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten
$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \left(\frac{r}{a}\right)^3 \sin\theta \cos\varphi$$
och på sfären gäller att $\phi(a, \theta, \varphi) = \phi_0$. Bestäm den elektriska potentialen ϕ i sfären.

8. Den elektrostatiska potentialen ϕ från en rymdladdning i ett dielektrikum i sfären $r = a$ uppfyller Poissons ekvation
$$\nabla^2 \phi(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} -\frac{\rho_0 r}{\kappa \epsilon_0 a} \cos\theta & r < a \\ 0 & r > a. \end{cases}$$
Utanför sfären är det vakuum. På sfären gäller skarvningsvillkoret för potentialen:
$$\phi_+ = \phi_-; \quad \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_+ = \kappa \left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)_- .$$
I oändligheten går ϕ mot noll. Bestäm ϕ överallt.

9. Antag att man på ytan S av en sfär med radien a och centrum i origo mäter upp det elektriska fältet $\mathbf{E}$ och finner att
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\rho_0 a^2}{\epsilon_0} \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right), \quad |\mathbf{a}| = a$$
där ϵ_0 ρ_0, b och c är konstanter. Visa att denna information tillsammans med en av Maxwells ekvationer är tillräcklig för att bestämma den totala laddningen Q inuti sfären. Beräkna Q.

10. I sfären med radien $r = a$ finns en rymdladdning med tätheten
$$\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \frac{r}{a} \sin\theta \cos\varphi$$
och på sfären gäller att $\Phi(a, \theta, \varphi) = \Phi_0$. Bestäm den elektrostatiska potentialen Φ och det elektriska fältet $\mathbf{E}$ inuti sfären.

11. Det elektriska fältet
$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$
som svarar mot en punktladdning i origo är källfritt för $r \neq 0$ och har en vektorpotential $\mathbf{A}$. Beräkna den *källfria* vektorpotentialen $\mathbf{A}$ till fältet $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ som i ett sfäriskt koordinatsystem har formen
$$\mathbf{A} = f(r, \theta, \varphi)\, \hat{\varphi},$$
där $f(2, \pi/2, \varphi) = 3Q/8\pi\epsilon_0$. Ange de punkter där $\mathbf{A}$ inte är definierad.
(993010)

12. Inuti en jordad metallsfär med radien a befinner sig en rymdladdning $\rho(r, \theta, \varphi) = \rho_0 \cos\theta$. Bestäm potentialen i sfären.
(000814)

13. En elektrisk ström I flyter i en oändlig, rak metallisk cylindrisk tråd med radien R, och ger utanför tråden upphov till ett magnetfält $\mathbf{B}$ som i cylinderkoordinater ges av uttrycket
$$\mathbf{B} = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{\hat{\varphi}}{\rho}, \quad \rho > R,$$
där μ_0 är vakuumpermeabiliteten.

(a) Visa att $\mathbf{B}$ har en vektorpotential. Undersök speciellt om det finns någon vektorpotential till $\mathbf{B}$ av formen $\mathbf{A} = A_z(\rho)\hat{\mathbf{z}}$ med egenskapen $|\mathbf{A}| \to 0$ då $\rho \to \infty$, och bestäm i så fall ett explicit uttryck för $A_z(\rho)$.

(b) Visa att $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ för $\rho > R$ men att det ändå inte finns någon skalärpotential ϕ sådan att $\mathbf{B} = \nabla\phi$ i området utanför tråden. Förklara varför!

(000426)

14. Tyngdkraftsaccelerationen $\mathbf{g}$ kan skrivas som $\mathbf{g} = -\nabla\phi$, där potentialfunktionen ϕ uppfyller ekvationen

$$\nabla^2\phi = \gamma\rho$$

där γ är en konstant och ρ masstätheten. Beräkna tyngdkraftsfältet för jorden om denna beskrivs som en sfär med radien R och med konstant masstäthet ρ_0.

15. En kondensator består av två koncentriska cirkulära metallcylindrar. Den inre har radien R_1 och potentialen ϕ_1 medan den yttre, vars radie är R_2, har potentialen ϕ_2. Potentialen ϕ satisfierar Laplaces ekvation i området mellan cylindrarna och är kontinuerlig vid cylinderytorna. Bestäm potentialen ϕ och det elektriska fältet $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ i detta område. (Ledning: Du kan helt försumma eventuella randeffekter från kondensatorns ändar, dvs betrakta kondensatorn som oändligt lång.)

Kapitel 7

Hela tentor

7.1 2000-10-21

1. Magnetfältet kring en neutronstjärna ser ut som ett dipolfält, vilket i sfäriska koordinater kan skrivas som

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{M}{r^3}\left(2\cos\theta\hat{\mathbf{r}} + \sin\theta\hat{\theta}\right)$$

En laddad partikel slits loss från neutronstjärnans yta vid $\theta = \pi/6$. Partikeln följer sedan magnetfältlinjen ut från stjärnan. Hur långt bort från stjärnan kommer partikeln som längst? Vi antar att neutronstjärnan är sfärisk med radien R.

2. Beräkna ytintegralen

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS},$$

där S är ytan:

$$x^2 + y^2 = [z-2]^2 \text{ och } -2 \le z \le 2$$

och

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_0\left(\frac{\rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}}{\left(\rho^2+z^2\right)^{3/2}} + \rho\hat{\alpha}\right)$$

i cylindriska koordinater.

3. **a**. Bestäm b så att de nya koordinaterna s, t, u blir ortogonala

$$\mathbf{r} = \left(e^s - e^t, -be^s + e^t, e^u\right)$$

b. Beräkna divergensen av fältet

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = Ae^s\hat{\mathbf{s}} + Be^t\hat{\mathbf{t}} - 2(A+B)e^u\hat{\mathbf{u}}.$$

4. Ett klot med radien a har en konstant elektrisk laddningstäthet ρ_0. Sfären omges av ett tunt sfäriskt skal med radien $4a$ och med en konstant ytladdningstäthet $-a\rho_0/48$.
a. Bestäm det elektriska fältet som en funktion av radien r.
b. Beräkna energin för det elektriska fältet.

5. (Endast för FFM232, 3p.) Lämmelforskaren Klas har upptäckt att lämlarnas reproduktionshastighet (hur många lämlar som föds per ytenhet per tidsenhet) är proportionell mot den lokala lämmeltätheten n med en proportionalitetskonstant R. Han har också funnit att lämlarna tenderar att flytta från områden med många lämlar till områden med få lämlar, så han tror att lämmelströmmen $\mathbf{J} = -k\nabla n$.

a. Formulera en differentialekvation som beskriver hur lämmelpopulationen varierar i tiden och rummet.
b. Klas har noterat att längst i väster blir lämmelströmmen $\mathbf{J} = 0$ eftersom fjällen blir för höga och kalla för lämlarna, och längst i öster, vid kusten, går lämmeltätheten, n, ner till 0 eftersom lämlarna drunknar. Han vet också att lämmeldensiteten är större än 0 överallt mellan fjällen och kusten, och som störst är den n_0. Antag att avståndet mellan fjällen och kusten är L. Finn den tidsoberoende lämmelfördelningen förutsatt att n bara varierar i öst-västlig riktning. Vilket samband måste råda mellan R, k och L för att det skall finnas en sådan fördelning som uppfyller de givna randvillkoren?

7.2 2001-01-12

1. Bestäm ekvationen för tangentplanet till ytan

$$x^2 + yz + z^2 = 10$$

i punkten $(2, -1, 3)$. Bestäm avståndet mellan detta plan och det parallella planet som går genom punkten $(3, -4, 5)$.

2. Beräkna integralen

$$\oint_C \left(\frac{F_0}{x^2 + y^2} + \frac{F_1}{a^2} \right) (x\hat{\mathbf{y}} - y\hat{\mathbf{x}}) \cdot \mathbf{dr},$$

där C är kurvan som ges av

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = a^2$$

och

$$z = 0.$$

3. Bestäm skalfaktorerna för det kroklinjiga koordinatsystemet $uv\varphi$, där

$$\begin{cases} x &= uv\cos\varphi \\ y &= uv\sin\varphi \\ z &= \frac{u^2 - v^2}{2} \end{cases}$$

och $0 \leq u, v < \infty$ samt $0 \leq \varphi < 2\pi$. Beräkna också gradienten av fältet $\Phi(u, v, \varphi) = (u^2 + v^2)\sin\varphi$.

4. En vit dvärg dvärg är en död stjärna av solens massa, men med en radie på endast 10^4 km. I termiskt avseende kan man tänka sig att den består av en isoterm kärna med radien R_0 och temperaturen T_c och ett tunt ytlager av tjockleken δ, och värmeledningsförmågan λ. Från ytan strålar den vita dvärgen ut σT_s^4 W m^{-2}, där σ är en konstant och T_s är yttemperaturen. Uttryck centraltemperaturen T_c i den observerade yttemperaturen T_s. Antag att $\delta \ll R_0$ så att du kan försumma ytlagrets krökning, och betrakta temperaturfördelningen som stationär, det vill säga

$$\nabla \cdot (-\lambda \nabla T) = 0.$$

5.

Stjärndatum 3948.3

Kaptens loggbok: Sedan tre dagar är rymdskeppet Enterprise fångat i ett kraftfält av okänt slag. Vi har förbrukat praktiskt taget allt vårt bränsle i våra försök att bryta oss ur kraftfältet. Vetenskapsofficer Spock rapporterar att kraftfältet är axisymmetriskt med en symmetriaxel längs med linjen $x = y = 0$, och dess rotation är $(F_0/a)\hat{\mathbf{z}}$. Fältet tycks vara fritt från singulariteter.

a. Beräkna arbetet som fältet utför på Enterprise om fartyget går ett varv i positiv led runt fältets symmetriaxel på avståndet R från symmetriaxeln.
b. Enterprise förlorar energin

$$\frac{F_0}{2a}\left(\rho^2 - \rho_1^2\right),$$

då den rör sig radiellt bort från symmetriaxeln från sitt nuvarande avstånd ρ_1 till ett godtyckligt avstånd ρ. Finn en bana i xy-planet sådan att Enterprise kan komma godtyckligt långt bort från fältets symmetriaxel utan att förbruka något bränsle.

7.3 2001-04-10

1. Genom solvinden och solens rotation får solens magnetfält en form som överskådligt kan beskrivas som

$$\mathbf{B} = B_0\left(\frac{R^2}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{\omega R}{u}\frac{R}{r}\hat{\varphi}\right),$$

där B_0 är det radiella fältets styrka vid solytan, R är solens radie, u solvindens hastighet (antas konstant) och ω solens vinkelhastighet. Bestäm som en funktion av r hur mycket en fältlinje har vridit sig runt solen.

2. Ett koordinatsystem $uv\varphi$ ges av

$$\mathbf{r} = a\left(uv\cos\varphi, uv\sin\varphi, \frac{u^2 - v^2}{2}\right).$$

Bestäm skalfaktorerna och beräkna $\nabla^2(u^2+v^2)$.

3. Vektorfältet $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F}\left(\rho,\alpha,z\right) = K\left[\frac{a^2}{\rho}\left(\hat{\rho} - \hat{\alpha}\right) + z\hat{\mathbf{z}}\right]$$

där K och a är konstanter, och ytan

$$S:\ \ \rho^2\left(4 - 3\cos^2\alpha\right) = 4z^2,\ \ 0 < z < a$$

är givna i cylinderkoordinater $\rho\alpha z$. Bestäm normalytintegralen av $\mathbf{F}$ över S.

4. Genom en solfångare går det ett rör med innerradien R. Rörets väggar består av en metall med tjockleken d. Genom solstrålningens inverkan har rörets yta en temperatur $T_1(1 + A\cos\varphi)$. Insidan på röret håller temperaturen T_0. Vid jämvikt gäller att i rörväggen är $\nabla^2 T = 0$. Beräkna temperaturfördelningen i rörväggen.

7.4 2001-08-20

1. Bestäm nivåytorna till funktionen

$$\Phi = \Phi_0\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+a^2},\ \ a > 0,\ \ \Phi_0 > 0.$$

2. En elektrisk ledare formad som en ring med radien R genomlöps av en ström I. Ledaren ligger i xy-planet med centrum i punkten $(x_0, y_0, 0)$. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I\mathbf{dr}\times\mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{z}} \tag{7.1}$$

påverkar ledaren. Beräkna också det magnetiska flödet genom ringen.

3. Ett vektorfält $\mathbf{F}$ har potentialen

$$\phi = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2,$$

dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet.

4. I en serie böcker beskrev den amerikanske författaren Edgar Rice Burroughs ett folk som levde på insidan av en ihålig jord. Beräkna tyngdaccelerationen överallt i en sådan jord om vi antar att den består av ett skal med en innerradie som är $2R/3$ och med en ytterradie som sammanfaller med jordradien R. Inuti skalet antar vi att det finns ett mindre klot med radien $R/3$ vars centrum sammanfaller med skalets centrum. Antag att densiteten i skalet och det inre klotet är konstant ρ, och uttryck ρ i termer av den kända tyngdaccelerationen g vid jordytan.

Ledning: Gauss lag för ett gravitationsfält

$$\oint_S \mathbf{g} \cdot \mathbf{dS} = 4\pi G M.$$

5. Klas har bestämt sig för att studera chalmeristernas dryckesvanor. Han har därför kommit överens med ledningen för Pripps att han skall få tillsätta en mindre mängd radioaktivt etanol (etanol som innehåller en kol-11 atom) till det öl som via en pipeline transporteras till Chalmers.

a. Härled en differentialekvation som beskriver hur densiteten c av radioaktivt etanol varierar som funktion av tiden och läget x i pipelinen. Antag att ölet strömmar med en konstant hastighet u_0 och att kol-11 sönderfaller med sönderfallstiden τ, det vill säga att under tiden $\mathrm{d}t$ minskar antalet kolatomer, N, med

$$\mathrm{d}N = N\frac{\mathrm{d}t}{\tau}.$$

b. Efter en viss tid inträder ett stationärt tillstånd i pipelinen, det vill säga densiteten av radioaktivt kol-11 beror inte längre på tiden. Om pipelinen har en längd L, vad blir då densiteten vid Chalmers uttryckt i densiteten ρ_0 vid Pripps?

7.5 2001-10-27

1. Beräkna den yttre tryckkraften

$$-\oint_S p\mathbf{dS}$$

som verkar på en sfärisk ballong med centrum i $z = 4H$ och radien $0.5H$, då trycket ges av

$$p = p_0 e^{-z/H}.$$

2. Magnetfältet kring en rak elektrisk ledare ges av

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{\rho}\hat{\varphi}$$

i cylindriska koordinater. Bestäm vektorpotentialen $\mathbf{A} = A_\rho \hat{\rho}$ som ger $\mathbf{B}$. För att göra $\mathbf{A}$ entydig så kräver vi att $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ och att

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{\pi}\hat{\rho}$$

då $\rho = z = a$.

3. I centrum av en sfär med radien a ligger en punktladdning Q. Sfären innehåller också en utbredd laddningsfördelning

$$\frac{3Q}{4\pi a^3}\left(1+\frac{1}{4}\cos\theta\right).$$

Beräkna den elektriska potentialen inuti i sfären om potentialen på ytan är 0.
4. En partikel med laddningen q rör sig längs banan

$$\mathbf{r}(t) = a\left(e^{t/\tau}, \sin\left(\frac{\pi t}{\tau}\right), \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right)\right),$$

där a och τ är konstanter, samt $0 \le t \le \tau/2$. Under rörelsen påverkas den av elektriska och magnetiska fält

$$\mathbf{E} = E_0\left(\frac{y}{a}\cos\frac{x}{a}, \sin\frac{x}{a}, 0\right),$$

och

$$\mathbf{B} = B_0\left(\cos(ky), \sin(kx), \sin(ky)\right),$$

där E_0, B_0 och k är konstanter. Dessa fält ger upphov till en kraft

$$\mathbf{F} = q\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}+\mathbf{E}\right)$$

på partikeln, där $\mathbf{v}$ är partikelns hastighet. Beräkna arbetet

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r},$$

som kraften utför på partikeln.

5. Rörmockaren Klas har fått i uppdrag att byta ut de gamla vattenledningsrören i en stad. Han hittar då en vattenledning som förlorar L l vatten per s och m vattenledning.
a. Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur vattenflödet F mätt i l per s varierar längs med röret. Antag att vi har ett stationärt flöde.
b. Om vattnet strömmar in genom röret, som har tvärsnittsarean A, med hastigheten u_0. Hur långt kan röret då längst vara om något vatten skall komma fram i den andra änden av röret?

7.6 2002-01-17

1. Ett vektorfält $\mathbf{B}$ ges av vektorpotentialen $\mathbf{A}$ genom sambandet $\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$. Finn fältlinjerna till $\mathbf{B}$ om

$$\mathbf{A} = A_0\frac{r_0^2}{x^2+y^2}\hat{\mathbf{z}},$$

där A_0 och r_0 är konstanter.

2. En planet är uppbyggt av ett material med värmeledningsförmågan λ. Genom att materialet är lätt radioaktivt alstras det värme i materialet. Den avgivna effekten per volymsenhet är ρ. För ett medium med en värmekälla gäller att $\nabla\cdot\mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda\nabla T$ (Fouriers lag).
a. Beräkna temperaturprofilen $T(r)$ i en sfärisk planet med radien R. Planetens yttemperatur kan antas vara 0 K.
b. Hur beror temperaturen i planetens centrum på dess radie R?

3. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där $\mathbf{F}$ i cylindriska koordinater ges av

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\rho\hat{\rho} + z\hat{\mathbf{z}}\right) \left(\frac{1}{a} + \frac{a^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\right),$$

och ytan S ges av

$$(z - 2a)^2 = x^2 + y^2,$$

där $-2a \leq z \leq 2a$ och normalvektorn pekar bort från z-axeln. a och F_0 är konstanter.

4. En partikel rör sig längs den slutna banan

$$C: \quad \frac{1}{4}(x - a)^2 + 9y^2 = a^2$$

i moturs riktning under inverkan av en kraft

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{ax}{x^2 + y^2}, \frac{x}{a} + \frac{ay}{x^2 + y^2}, 0\right).$$

a och F_0 är konstanter. Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln

$$\oint \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}.$$

5. Fiskaren Klas är bekymrad för torskbeståndet i Nordsjön. Hans studier visar att torskbeståndet i en punkt tillväxer proportionellt mot den lokala torsktätheten n (mätt i torskar m^{-2}) med en proportionalitetskonstant γ, men det försvinner också torskar på grund av fisket, vilket han beskriver med en utfiskningsfunktion g med enhet torskar $\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{s}^{-1}$. Dessutom flyttar torskarna bort från områden som fiskas intensivt, och torskströmmen kan skrivas som $-D\nabla g$.
a. Sätt upp en differentialekvation för torskbeståndet.
b. Om vi antar att Nordsjön kan beskrivas som en cirkelskiva med radien R med kusterna längs skivans rand beräkna den stationära (tidsoberoende) torsktätheten om vi kan skriva utfisknings-funktionen som

$$g = g_0 \frac{R^2 - \rho^2}{R^2}.$$

Antag att γ och D är konstanter.

7.7 2002-08-19

1. Ett magnetfält $\mathbf{B}$ ges av

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}(y, x),$$

där B_0 och a är konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje som går genom $(a, 0)$.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där S är ytan $\rho = a$ och $-2a \leq z \leq 2a$ med en utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{a^2\rho}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{\rho\cos^2\varphi}{a}\right)\hat{\rho} - \frac{\rho\sin\varphi\cos\varphi}{a}\hat{\varphi} + \frac{a^2 z}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\hat{\mathbf{z}}\right],$$

där F_0 och a är konstanter.

3. En koaxialkabel består av en central cylindrisk ledare med radien R som omges av en annan ledare i form av ett tunt cylindriskt skal med radien $1,5R$ (mellan de båda ledarna, och utanpå den yttre ledaren finns isolermaterial). Genom den inre ledaren går en elektrisk ström I_0, och en lika stor ström går tillbaka genom den yttre ledaren. Beräkna magnetfältet kring kabeln. *Ledning:* Man kan anta att magnetfältlinjerna är koncentriska cirklar kring kabelns axel.

4. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där C är skärningen mellan ytorna

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2$$

och

$$z = \frac{2}{3}a$$

genomlöpt i positiv riktning. Fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(-zy, zx, x^2 + y^2\right)$$

där F_0 och a är konstanter.

5. Kärnfysikern Klas skall konstruera en kärnreaktor. I reaktorn frigörs energi genom att neutroner klyver urankärnorna i reaktorns bränsle. Klas behöver därför beräkna neutrontätheten n i reaktorn. Han vet att neutronerna transporteras genom reaktorn genom diffusion, det vill säga flödet av neutroner $\mathbf{J} = -k\nabla n$, där k är en konstant diffusionskoefficient. När en neutron klyver en atomkärna, så bildas det flera nya neutroner, och kärnklyvningen kan därför betraktas som en källa för neutroner. För enkelhets skull antar Klas att bränslet är jämt fördelat i reaktorn, och att mängden kärnklyvningar per tids- och volymsenhet, och därmed mängden nybildade neutroner, är proportionell mot den lokala neutrontätheten med en proportionalitetskoefficient A.
a). Ställ upp en differentialekvation som beskriver neutrontätheten som funktion av tid och position.
b) Beräkna neutrontätheten i reaktorn då jämvikt har ställt in sig, det vill säga när neutrontätheten inte beror på tiden. Antag att reaktorn är en-dimensionell och har längden L och att neutrontätheten är 0 vid reaktorns väggar. Neutrontäthetens största värde är n_0 och den kan inte vara negativ någonstans. Hur måste A, k och L vara relaterade till varandra för att det skall finnas en lösning för n.

7.8 2002-10-26

1. I en fluid har man hastighetsfältet

$$\mathbf{u} = \Omega_0\left(\rho\hat{\rho} + \frac{\rho}{1+\frac{\rho}{a}}\hat{\varphi} + \rho\sqrt{1+\frac{z}{a}}\hat{\mathbf{z}}\right),$$

där Ω_0 och a är konstanter. Man kan sedan definiera en vorticitet $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$ för detta hastighetsfält. Bestäm var i fluiden som z-komponenten av vorticiteten har sitt maximum.

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{dS} \times \mathbf{F},$$

där

$$\mathbf{F} = F_0 \left(\frac{\rho^2 + a^2}{\rho^2} \hat{\rho} + \frac{a}{\rho} \hat{\varphi} + \frac{\rho \sin \varphi}{a} \hat{\mathbf{z}} \right),$$

där F_0 och a är konstanter. Ytan S är cylindern som ges av $\rho = a$, $0 \leq z \leq 2a$, och vars normal är riktad utåt.

3. Genom en solfångare löper ett långt vattenledningsrör med innerradien R_1 och ytterradien R_2. Vattnet inuti röret håller temperaturen T_0 och på rörets yta varierar temperaturen med vinkeln φ som

$$T(R_2, \varphi) = T_0 \frac{3 + \cos \varphi}{2}.$$

Bestäm temperaturfördelningen i rörmaterialet.

4. Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där C är skärningen mellan ytorna

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25a^2,$$

och

$$x + 2y - 2z = 9a,$$

och $\mathbf{F}$ är fältet

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a} \left[z (\cos \varphi + 2 \sin \varphi) \hat{\rho} + z (2 \cos \varphi - \sin \varphi) \hat{\varphi} - \rho \hat{\varphi} + \rho \sin \varphi \hat{\mathbf{z}} \right]$$

och F_0 och a är konstanter.

5. Plasmafysikern Klas studerar magnetfält i ett plasma. I ett rörligt medium, som ett plasma, antar Ohms lag en mer komplicerad form än i en vanlig elektrisk ledare:

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

där $\mathbf{J}$ är strömtätheten, σ den elektriska konduktiviteten (kan antas vara konstant), $\mathbf{E}$ det elektriska fältet, $\mathbf{v}$ hastighetsfältet i fluiden och $\mathbf{B}$ magnetfältet. Medan Ohms lag kan tyckas vara komplicerad, så kan Klas faktiskt kosta på sig några förenklingar av Maxwells ekvationer. Alla processer han studerar är så långsamma att han kan försumma förskjutningsströmmen $\partial_t \mathbf{E}$ i Maxwells ekvationer.
a. Härled åt Klas en differentialekvation för magnetfältet, vilken innehåller de båda vektorfälten $\mathbf{B}$ och $\mathbf{v}$.
b. Om plasmat ligger stilla finns det en lösning på formen

$$\mathbf{B} = f(t) \exp \left(-\frac{x^2}{4\eta t} \right) \hat{\mathbf{y}},$$

där $\eta = 1/(\mu_0 \sigma)$. Bestäm $f(t)$.

7.9 2003-01-16

1. En yta ges av ekvationen

$$x^2 + xy + z^2 = 5.$$

Bestäm ekvationen för tangentplanet till denna yta i punkten $(1, 0, 2)$, och bestäm avståndet från tangentplanet till punkten $(2, 2, 3)$

2. Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där S är ytan

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = a^2, \quad z \geq 0$$

med uppåtriktad normal, och fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F}(\rho, \varphi, z) = \frac{F_0}{a^2} \left[\frac{a^4 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\rho} + \left(\frac{a^4 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + z^2 \right) \hat{\mathbf{z}} \right].$$

F_0 och a är konstanter.

3. En planet med radien R uppvärms av att ett radioaktivt material sönderfaller och avger en effekt ρ_0 per volymsenhet. Genom sina kemiska egenskaper är förekommer det radioaktiva materialet bara för $r > R/2$. För ett medium med en värmekälla ρ gäller att $\nabla \cdot \mathbf{J} = \rho$, där värmeströmmen $\mathbf{J} = -\lambda \nabla T$ (Fouriers lag). Beräkna temperaturfördelningen i planetens inre om värmeledningsförmågan i ytlagret är λ och i planetens inre 3λ samt att vi kan sätta temperaturen vid planetens yta till 0 K.
Ledning: T och $\partial_r T$ är kontinuerliga vid $r = R/2$.

4. En partikel rör sig längs en bana som i cylindriska koordinater ges av

$$\begin{cases} \rho &= a \\ z &= a\varphi \end{cases}$$

där $\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ och a är en konstant. Partikeln påverkas av en kraft som ges av rotationen av vektorpotentialen

$$\mathbf{A} = F_0 \left(z, 0, a \ln \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}} \right).$$

Beräkna det arbete som kraften utför på partikeln.

5. Fåraherden Klas har studerat hur hans får rör sig över ängen. Han finner att det är två faktorer som bestämmer hur fåren rör sig över ängen. Dels vill fåren inte trängas för mycket, så det uppstår en ström av får bort från de områden där fårtätheten n är störst. Denna ström kan skrivas som $-\lambda_1 \nabla n$. Å andra sidan så dras fåren till de delar av ängen där grästätheten g är störst och denna ström kan skrivas som $\lambda_2 \nabla g$. Vi antar att λ_1 och λ_2 är konstanter.
a. Ställ upp en differentialekvation som beskriver hur fårens fördelning över ängen varierar med tiden.
b. På morgonen tar Klas sina får till en cirkulär äng med radien R, och grästätheten

$$g(\rho) = g_0 \frac{R^2 - \rho^2}{R^2},$$

där g_0 är en konstant och $0 \leq \rho \leq R$. När fåren har fått vandra omkring en stund, så inställer sig en stationär fördelning (dvs den beror inte längre på tiden). Beräkna denna fördelning. Använd randvillkoret att fårtätheten vid ytterranden skall vara 0.

Kapitel 8

Fullständig lösning till tentamen 2001-08-20

8.1 Uppgift 1

Bestäm nivåytorna till funktionen

$$\Phi = \Phi_0 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a > 0, \quad \Phi_0 > 0.$$

Lösning: Sätt $\Phi = C\Phi_0$

$$C = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + a^2} \tag{8.1}$$

där $C \geq 0$. Vi kan nu skriva om detta som

$$C\left(x^2 + y^2 + a^2\right) = x^2 + y^2 + z^2, \tag{8.2}$$

vilket också kan skrivas som

$$\frac{1 - C}{Ca^2} x^2 + \frac{1 - C}{Ca^2} y^2 + \frac{1}{Ca^2} z^2 = 1. \tag{8.3}$$

Det finns nu tre möjliga fall. Om $0 \leq C < 1$ så är alla koefficienterna positiva och ekvationen beskriver en ellips med halvaxlarna

$$\sqrt{\frac{C}{1 - C}} a, \quad \sqrt{\frac{C}{1 - C}} a, \quad \sqrt{C} a. \tag{8.4}$$

Om $C = 1$, så har vi ett specialfall där

$$z^2 = Ca^2, \tag{8.5}$$

det vill säga planen med $z = \pm\sqrt{C}a$. Slutligen har vi fallet $C > 1$. Vi skriver då ekvationen som

$$\frac{C - 1}{Ca^2} x^2 + \frac{C - 1}{Ca^2} y^2 - \frac{1}{Ca^2} z^2 = -1. \tag{8.6}$$

Detta är ekvationen för en två-mantlad hyperboloid med z-axeln som symmetriaxel och med halvaxlar

$$\sqrt{\frac{C}{C - 1}} a, \quad \sqrt{\frac{C}{C - 1}} a, \quad \sqrt{C} a. \tag{8.7}$$

8.2 Uppgift 2

En elektrisk ledare formad som en ring med radien R genomlöps av en ström I. Ledaren ligger i xy-planet med centrum i punkten $(x_0, y_0, 0)$. Beräkna kraften

$$\mathbf{F} = \int_C I\mathbf{dr} \times \mathbf{B}$$

med vilken magnetfältet

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{z}} \tag{8.8}$$

påverkar ledaren. Beräkna också det magnetiska flödet genom ringen.

Lösning: Vi kan skriva om integralen

$$\mathbf{F} = \oint_C I\mathbf{dr} \times \mathbf{B} \tag{8.9}$$

med en Stokes-analog sats

$$\mathbf{F} = \oint_C I\mathbf{dr} \times \mathbf{B} = I \int_S (\mathbf{dS} \times \nabla) \times \mathbf{B}. \tag{8.10}$$

Ytan S har normalvektorn $\hat{\mathbf{z}}$, så vi kan skriva

$$\hat{\mathbf{z}} \times \nabla = \left(-\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}, 0 \right). \tag{8.11}$$

Vi beräknar nu

$$(\hat{\mathbf{z}} \times \nabla) \times \mathbf{B} = B_0 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{a} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{a} \right), 0 \right) = \frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{x}}. \tag{8.12}$$

Integralen blir sedan

$$\mathbf{F} = I \int_S \mathrm{d}S \frac{B_0}{a} \hat{\mathbf{x}} = \frac{IB_0}{a} \pi R^2 \hat{\mathbf{x}}. \tag{8.13}$$

Vi skall också beräkna det magnetiska flödet

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS}. \tag{8.14}$$

Vi byter då till de nya variablerna $x' = x - x_0$ och $y' = y - y_0$. I de nya variablerna har cirkeln C sitt centrum i origo. Magnetfältet kan vi nu skriva som

$$\mathbf{B} = B_0 \frac{x' + x_0}{a} \hat{\mathbf{z}}. \tag{8.15}$$

Vi kan nu dela upp integralen på två delar

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{dS} = \int_S B_0 \frac{x'}{a} \mathrm{d}S + \int_S B_0 \frac{x_0}{a} \mathrm{d}S. \tag{8.16}$$

Vi kan nu konstatera att

$$\int_S B_0 \frac{x'}{a} \mathrm{d}S = 0, \tag{8.17}$$

ty x' är en udda funktion av x'. Den andra integralen blir

$$\int_S B_0 \frac{x_0}{a} \mathrm{d}S = B_0 \frac{x_0}{a} \pi R^2, \tag{8.18}$$

vilket alltså är det magnetiska flödet.

8.3 Uppgift 3

Ett vektorfält **F** har potentialen

$$\phi = 3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x^2+y^2+z^2\right)^2,$$

dvs $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Genom vilken sluten yta S är flödet av vektorfältet maximalt? Beräkna det maximala flödet.

Lösning: Fl"odet kan vi skriva som

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS}. \tag{8.19}$$

För en sluten yta gäller Gauss sats

$$\oint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{dS} = \int_V \nabla\cdot\mathbf{F}\mathrm{d}V = \int_V \nabla\cdot\nabla\phi\mathrm{d}V = \int_V \nabla^2\phi\mathrm{d}V. \tag{8.20}$$

Vi vill nu beräkna resultatet av att Laplace-operatorn verkar på fältet

$$\phi = 3\left(x^2+y^2+z^2\right) - \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = 3r^2 - r^4. \tag{8.21}$$

Vi kan nu beräkna

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(6r^3-4r^5\right) = 18-20r^2. \tag{8.22}$$

Notera nu att integranden är positiv om

$$18-20r^2 > 0, \tag{8.23}$$

det vill säga om

$$r < \frac{3}{\sqrt{10}}. \tag{8.24}$$

Man får alltså maximalt flöde om man integrerar över det sfäriska skalet $r = 3/\sqrt{10}$. Det totala flödet blir

$$\int_V \left(18-20r^2\right)\mathrm{d}V = \int \mathrm{d}\Omega \int_0^{3/\sqrt{10}} \left(18-20r^2\right)r^2\mathrm{d}r = 4\pi\left[6r^3-4r^5\right]_0^{3/\sqrt{10}} =$$
$$4\pi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^3\left(6-4\frac{9}{10}\right) = 4\pi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\frac{141}{25}. \tag{8.25}$$

8.4 Uppgift 4

I en serie böcker beskrev den amerikanske författaren Edgar Rice Burroughs ett folk som levde på insidan av en ihålig jord. Beräkna tyngdaccelerationen överallt i en sådan jord om vi antar att den består av ett skal med en innerradie som är $2R/3$ och med en ytterradie som sammanfaller med jordradien R. Inuti skalet antar vi att det finns ett mindre klot med radien $R/3$ vars centrum sammanfaller med skalets centrum. Antag att densiteten i skalet och det inre klotet är konstant ρ, och uttryck ρ i termer av den kända tyngdaccelerationen g vid jordytan.

Ledning: Gauss lag för ett gravitationsfält

$$\oint_S \mathbf{g}\cdot\mathbf{dS} = -4\pi GM.$$

Lösning: Gauss lag kan skriva som

$$\oint_{\partial V} \mathbf{g}\cdot\mathbf{dS} = -\int_V 4\pi G\rho\mathrm{d}V = -4\pi G\int_V \rho\mathrm{d}V. \tag{8.26}$$

För $r > R$ så gäller att integralen i högerledet tar med hela Jordens massa, så att vi får

$$4\pi r^2 g = -4\pi GM, \tag{8.27}$$

vilket ger

$$g = -\frac{GM}{r^2}. \tag{8.28}$$

Vid jordytan är

$$g_0 = \frac{GM}{R^2}, \tag{8.29}$$

vilket ger

$$M = \frac{g_0 R^2}{G}. \tag{8.30}$$

Vi kan också skriva Jordens massa som

$$\begin{gathered} M = \int_0^{R/3} \rho r^2 \mathrm{d}r \int_\Omega \mathrm{d}\Omega + \int_{2R/3}^{R} \rho r^2 \mathrm{d}r \int_\Omega \mathrm{d}\Omega = \\ \frac{4\pi}{3}\left(\frac{R}{3}\right)^3 \rho + \frac{4\pi}{3}\left[R^3 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3\right]\rho = \frac{80\pi}{81} R^3 \rho. \end{gathered} \tag{8.31}$$

Vi kan nu sätta de båda uttrycken för Jordens massa lika med varandra

$$\frac{80\pi}{81} R^3 \rho = \frac{g_0 R^2}{G}, \tag{8.32}$$

vilket ger om vi löser ut densiteten

$$\rho = \frac{81 g_0}{80\pi G R}. \tag{8.33}$$

Efter att nu ha uttryckt Jordens densitet i termer av g_0 kan vi beräkna tyngdaccelerationen i Jordens inre.

Först tittar vi på fallet $r < R/3$

$$4\pi r^2 g = -4\pi G \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{81 g_0}{80\pi G R} = -4\pi \frac{27 g_0}{20 R} r^3, \tag{8.34}$$

som ger

$$g = -\frac{27 g_0}{20} \frac{r}{R}. \tag{8.35}$$

I fallet $R/3 < r < 2R/3$ är massan konstant, lika med den innanför $R/3$

$$4\pi r^2 g = -4\pi G \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{3}\right)^3 \frac{81 g_0}{80\pi G R} = -4\pi \frac{g_0}{20} R^2, \tag{8.36}$$

vilket ger att

$$g = -\frac{g}{20}\left(\frac{R}{r}\right)^2. \tag{8.37}$$

Slutligen då $2R/3 < r < R$ har vi

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 g = -4\pi G \left[\frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{3}\right)^3 \frac{81 g_0}{80\pi G R} + \frac{4}{3}\pi \left\{ r^3 - \left(\frac{2R}{3}\right)^3 \right\} \frac{81 g_0}{80\pi G R}\right] = \\ -4\pi \frac{27 g_0}{20}\left[r^3 - \frac{7R^3}{27}\right], \end{aligned} \tag{8.38}$$

vilket ger

$$g = -\frac{27 g_0}{20}\left[\frac{r}{R} - \frac{7}{27}\left(\frac{R}{r}\right)^2\right]. \tag{8.39}$$

8.5 Uppgift 5

Klas har bestämt sig för att studera chalmeristernas dryckesvanor. Han har därför kommit överens med ledningen för Pripps att han skall få tillsätta en mindre mängd radioaktivt etanol (etanol som innehåller en kol-11 atom) till det öl som via en pipeline transporteras till Chalmers.

a. Härled en differentialekvation som beskriver hur densiteten c av radioaktivt etanol varierar som funktion av tiden och läget x i pipelinen. Antag att ölet strömmar med en konstant hastighet u_0 och att kol-11 sönderfaller med sönderfallstiden τ, det vill säga att under tiden $\mathrm{d}t$ minskar antalet kolatomer, N, med

$$\mathrm{d}N = N\frac{\mathrm{d}t}{\tau}.$$

b. Efter en viss tid inträder ett stationärt tillstånd i pipelinen, det vill säga densiteten av radioaktivt kol-11 beror inte längre på tiden. Om pipelinen har en längd L, vad blir då densiteten vid Chalmers uttryckt i densiteten ρ_0 vid Pripps?

Lösning: **a**. Betrakta ett volymselement $\mathrm{d}V$ av röret. Elementet har en tvärsnittsarea A och går emellan punkterna x och $x+\mathrm{d}x$ i röret. Under en tid $\mathrm{d}t$ strömmar det in en mängd

$$u_0\rho(x)A\mathrm{d}t \tag{8.40}$$

av etanol i volymselementet. Samtidigt strömmar det ut en mängd

$$-u_0\rho(x+\mathrm{d}x)A\mathrm{d}t \tag{8.41}$$

ur volymselementet. Därtill försvinner det en mängd

$$-\rho A\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{\tau} \tag{8.42}$$

genom radioaktivt sönderfall i volymselementet. Den totala förändringen av mängden etanol blir då

$$\mathrm{d}\rho A\mathrm{d}x = u_0\rho(x)A\mathrm{d}t - u_0\rho(x+\mathrm{d}x)A\mathrm{d}t - \rho A\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}t}{\tau}. \tag{8.43}$$

Vi dividerar nu med $A\mathrm{d}x\mathrm{d}t$ på båda sidor

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{u_0\rho(x) - u_0(x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} - \frac{\rho(x)}{\tau}. \tag{8.44}$$

Efter en Taylor-utveckling av $\rho(x+\mathrm{d}x)$ får vi

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{u_0\left[\rho(x) - \rho(x) - \frac{\partial\rho}{\partial x}\mathrm{d}x\right]}{\mathrm{d}x} - \frac{\rho(x)}{\tau} = -u_0\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\rho(x)}{\tau}. \tag{8.45}$$

Vår differentialekvation är alltså

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -u_0\frac{\partial\rho}{\partial x} - \frac{\rho}{\tau}. \tag{8.46}$$

b. Enligt förutsättningar är densiteten tidsoberoende, så vi kan skriva

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0. \tag{8.47}$$

Vår ekvation förenklas då till

$$u_0\frac{\partial\rho}{\partial x} = -\frac{\rho}{\tau}, \tag{8.48}$$

som vi kan skriva om som

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{u_0\tau}. \tag{8.49}$$

Vi integrerar nu vår differentialekvation utgående från $x = 0$ där vi har etanoldensiteten ρ_0

$$\ln\rho - \ln\rho_0 = -\frac{x}{u_0\tau}, \tag{8.50}$$

som vi till sist skriver om som

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{x}{u_0\tau}}. \tag{8.51}$$

Kapitel 9

Fullständig lösning till tentamen 2002-08-19

9.1 Uppgift 1

Ett magnetfält $\mathbf{B}$ ges av

$$\mathbf{B} = \frac{B_0}{a}(y, x),$$

där B_0 och a är konstanter. Bestäm ekvationen för den fältlinje som går genom $(a, 0)$.

Lösning: Fältlinjekvationen ges av

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = C\mathbf{B}. \tag{9.1}$$

Vi sätter $C = 1$ och får ekvationerna

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} & = & \frac{B_0}{a}y \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} & = & \frac{B_0}{a}x \end{cases} \tag{9.2}$$

Vi dividerar dessa ekvationer med varandra och får

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{y}{x}, \tag{9.3}$$

som kan skrivas om till

$$x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y, \tag{9.4}$$

varefter vi integrerar

$$\frac{x^2}{2} = \frac{y^2}{2} + D. \tag{9.5}$$

Nu vet vi att fältlinjen skall gå igenom $(a, 0)$, vilket ger

$$\frac{a^2}{2} = D. \tag{9.6}$$

. Alltså blir fältlinjens ekvation

$$x^2 = y^2 + a^2. \tag{9.7}$$

9.2 Uppgift 2

Beräkna integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS},$$

där S är ytan $\rho = a$ och $-2a \leq z \leq 2a$ med en utåtriktad normal, och

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\left(\frac{a^2 \rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} + \frac{\rho \cos^2 \varphi}{a} \right) \hat{\rho} - \frac{\rho \sin \varphi \cos \varphi}{a} \hat{\varphi} + \frac{a^2 z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \hat{\mathbf{z}} \right],$$

där F_0 och a är konstanter.

Lösning: Vi konstaterar först att S är en cylinderyta med z-axeln som symmetriaxeln. Vi utnyttjar sedan sambanden $\rho^2 + z^2 = r^2$ och $x = \rho \cos \varphi$ för att skriva om fältet till

$$\mathbf{F} = F_0 \left[\frac{a^2}{r^3} (\rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}}) + \frac{x}{a} (\cos \varphi \hat{\rho} - \sin \varphi \hat{\varphi}) \right] = F_0 \left[\frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \right], \tag{9.8}$$

där vi har använt att $\hat{\mathbf{x}} = \rho \hat{\rho} + z \hat{\mathbf{z}}$ och $\hat{\mathbf{x}} = \cos \varphi \hat{\varphi} - \sin \varphi \hat{\varphi}$. Den första termen i $\mathbf{F}$ är singulär i $r = 0$, men å andra sidan så är

$$\nabla \cdot \left(\frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{a^2}{r^2} \right) = 0, \tag{9.9}$$

då $r \neq 0$. För den andra delen av fältet blir divergensen

$$\nabla \cdot \left(F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \right) = \frac{F_0}{a}. \tag{9.10}$$

Vi kan nu dela upp integralen som

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \int_S F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} + \int_S F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS}. \tag{9.11}$$

Vi beräknar först den sista integralen med hjälp av Gauss sats. För att göra detta lägger vi till en botten S_1 och ett lock S_2 till cylinderytan

$$\int_S F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_1} F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_2} F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \left(F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \right) \mathrm{d}V. \tag{9.12}$$

Eftersom S_1 och S_2 har normalvektorerna $\hat{\mathbf{z}}$ och $-\hat{\mathbf{z}}$ så följer att

$$\int_{S_1} F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_2} F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} = 0. \tag{9.13}$$

Alltså får vi

$$\int_S F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \left(F_0 \frac{x}{a} \hat{\mathbf{x}} \right) \mathrm{d}V = \int_V \frac{F_0}{a} \mathrm{d}V = \frac{F_0}{a} \pi a^2 4a = 4\pi F_0 a^2. \tag{9.14}$$

För den andra delen av integralen sluter vi ytan på ett annat sätt. Vi skapar två konytor S_3 och S_4 sm båda har spetsen i origo, och sedan går genom cirklarna $\rho = a$ och $z = 2a$, respektive $\rho = a$ och $z = -2a$. Genom sin konstruktion kommer S_3 och S_4 att ha normalvektorerna $-\hat{\theta}$ och $\hat{\theta}$. Konernas öppningsvinkel kring z-axeln kallar vi för θ_0. För att undvika singulariteten i origo så avbryter vi dem med en del av en sfär, S_ϵ, med radien ϵ innan de kommer ner till origo. S_ϵ har då normalvektorn $-\hat{\mathbf{r}}$. Vi kan nu tillämpa Gauss sats

$$\int_S F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_3} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_4} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} + \int_{S_\epsilon} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} = \int_V \nabla \cdot \left(F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \right) \mathrm{d}V = 0. \tag{9.15}$$

Genom att $\hat{\mathbf{r}}$ och $\hat{\theta}$ är ortogonala mot varandra så följer det att

$$\int_{S_3} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_4} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} = 0. \tag{9.16}$$

Vi beräknar nu integralen över S_ϵ

$$\int_{S_\epsilon} F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} = -F_0 \frac{a^2}{\epsilon^2} \epsilon^2 \int_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} \int_0^{2\pi} \sin\theta \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta = -2\pi F_0 a^2 \left[-\cos\theta\right]_{\theta_0}^{\pi-\theta_0} =$$

$$-4\pi F_0 a^2 \cos\theta_0 = -\frac{8\pi F_0 a^2}{\sqrt{5}}, \tag{9.17}$$

ty $\cos\theta_0 = 2/\sqrt{5}$. Alltså har vi

$$\int_S F_0 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{dS} = \frac{8\pi F_0 a^2}{\sqrt{5}}, \tag{9.18}$$

och till slut har vi för hela integralen

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{dS} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) 4\pi F_0 a^2. \tag{9.19}$$

9.3 Uppgift 3

En koaxialkabel består av en central cylindrisk ledare med radien R som omges av en annan ledare i form av ett tunt cylindriskt skal med radien $1,5R$ (mellan de båda ledarna, och utanpå den yttre ledaren finns isolermaterial). Genom den inre ledaren går en elektrisk ström I_0, och en lika stor ström går tillbaka genom den yttre ledaren. Beräkna magnetfältet kring kabeln. *Ledning:* Man kan anta att magnetfältlinjerna är koncentriska cirklar kring kabelns axel.

Lösning: Amperes lag säger oss att

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot \mathbf{dr} = I, \tag{9.20}$$

där $\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B}$ och I är den ström som passerar genom en yta som har C som rand. Denna yta kan vi välja till en cirkelskiva med radien r. Om $r > 1,5R$ så är den totala strömmen genom cirkelskivan 0, och därigenom måste också magnetfältet $B_\phi = 0$.

Då $R < r < 1,5R$ så är strömmen $I = I_0$, och integralen blir

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot \mathbf{dr} = 2\pi r B_\phi = \mu_0 I, \tag{9.21}$$

och magnetfältet blir

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0}{r}. \tag{9.22}$$

För $r < R$ så gäller att strömmen I_0 är jämnt fördelad över ledarens tvärsnittsarea. Därför blir den ström som passerar genom cirkelskivan med radien r

$$I = I_0 \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = I_0 \frac{r^2}{R^2}. \tag{9.23}$$

I detta fallet får vi alltså

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2, \tag{9.24}$$

och magetnfältet blir till sist

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_0 r}{R^2}. \tag{9.25}$$

9.4 Uppgift 4

Beräkna integralen

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr},$$

där C är skärningen mellan ytorna

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36a^2$$

och

$$z = \frac{2}{3}a$$

genomlöpt i positiv riktning. Fältet $\mathbf{F}$ ges av

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2}\left(-zy, zx, x^2 + y^2\right)$$

där F_0 och a är konstanter.

Lösning: Vi börjar med att skriva om fältet som

$$\mathbf{F} = \frac{F_0}{a^2}\left[z\left(-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}}\right) + \rho^2\hat{\mathbf{z}}\right] = \frac{F_0}{a^2}\left(z\rho\hat{\varphi} + \rho^2\hat{\mathbf{z}}\right), \tag{9.26}$$

där vi har använt att $x^2 + y^2 = \rho^2$ och $-y\hat{\mathbf{x}} + x\hat{\mathbf{y}} = \rho\hat{\varphi}$.

Vi kan också konstatera att de båda ytorna är en ellipsoid och ett plan parallellt med xy-planet. För att bestämma skärningskurvan sätter vi in $z = 2a/3$ i ellipsoidens ekvation

$$x^2 + 4y^2 = 36a^2 - 9\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = 32a^2, \tag{9.27}$$

vilket är ekvationen för en ellips med halvaxlarna $4\sqrt{2}a$ och $2\sqrt{2}a$.

Låt oss nu betrakta vår integral, som vi ser kan förenklas till

$$\oint_C \frac{F_0}{a^2} z\rho\hat{\varphi}\mathbf{dr}, \tag{9.28}$$

eftersom tangentvektorn till C måste vara ortogonal till $\hat{\mathbf{z}}$. Rotationen av integranden blir

$$\nabla \times \left(\frac{F_0}{a^2} z\rho\hat{\varphi}\right) = \frac{F_0}{a^2}\left[\frac{z}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\right)\hat{\mathbf{z}} - \frac{\partial}{\partial z}\left(z\rho\right)\hat{\rho}\right] = \frac{F_0}{a^2}\left[2z\hat{\mathbf{z}} - \rho\hat{\rho}\right]. \tag{9.29}$$

Om vi nu utnyttjar att $z = 2a/3$ längs vår ellips så får vi att rotationen blir

$$\frac{4}{3}\frac{F_0}{a}\hat{\mathbf{z}}. \tag{9.30}$$

Stokes sats ger oss sedan att

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \frac{4}{3}\frac{F_0}{a}\pi 4\sqrt{2}a 2\sqrt{2}a = \frac{64\pi}{3}F_0 a. \tag{9.31}$$

9.5 Uppgift 5

Kärnfysikern Klas skall konstruera en kärnreaktor. I reaktorn frigörs energi genom att neutroner klyver urankärnorna i reaktorns bränsle. Klas behöver därför beräkna neutrontätheten n i reaktorn. Han vet att neutronerna transporteras genom reaktorn genom diffusion, det vill säga flödet av neutroner $\mathbf{J} = -k\nabla n$, där k är en konstant diffusionskoefficient. När en neutron klyver en

atomkärna, så bildas det flera nya neutroner, och kärnklyvningen kan därför betraktas som en källa för neutroner. För enkelhets skull antar Klas att bränslet är jämt fördelat i reaktorn, och att mängden kärnklyvningar per tids- och volymsenhet, och därmed mängden nybildade neutroner, är proportionell mot den lokala neutrontätheten med en proportionalitetskoefficient A.
a). Ställ upp en differentialekvation som beskriver neutrontätheten som funktion av tid och position.
b) Beräkna neutrontätheten i reaktorn då jämvikt har ställt in sig, det vill säga när neutrontätheten inte beror på tiden. Antag att reaktorn är en-dimensionell och har längden L och att neutrontätheten är 0 vid reaktorns väggar. Neutrontäthetens största värde är n_0 och den kan inte vara negativ någonstans. Hur måst e A, k och L vara relaterade till varandra för att det skall finnas en lösning för n.

Lösning: **a**. En volynm V innehåller

$$\int_V n\mathrm{d}V \tag{9.32}$$

neutroner. I denna volym bildas det

$$\int_V An\mathrm{d}V \tag{9.33}$$

neutroner per tidsenhet. Utflödet av neutroner från volymen V är

$$\oint_S \mathbf{J}\cdot\mathbf{dS} = \oint_S -k\nabla n\cdot\mathbf{dS} = \int_V -k\nabla\cdot\nabla n\mathrm{d}V = \int_V -k\nabla^2 n\mathrm{d}V, \tag{9.34}$$

där S är begränsningsytan till V och vi har utnyttjat Gauss sats. Vi kan nu skriva förändringen per tidsenhet av antalet neutroner i V som

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V n\mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial n}{\partial t}\mathrm{d}V = \int_V An\mathrm{d}V + \int_V k\nabla^2 n\mathrm{d}V = \int_V \left(An + k\nabla^2 n\right)\mathrm{d}V. \tag{9.35}$$

där vi i den första likheten har kastat om ordningen mellan integrationen och derivationen. Nu gäller det att vi har valt volymen V helt godtyckligt, så samma likhet måste gälla mellan integranderna.

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k\nabla^2 n + An. \tag{9.36}$$

b. Vid jämvikt skall vi lösa ekvationen

$$0 = k\nabla^2 n + An, \tag{9.37}$$

som vi i en dimension kan skriva som

$$\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{A}{k}n = 0. \tag{9.38}$$

Denna ekvation har lösningen

$$n\left(x\right) = B\cos\kappa x + C\sin\kappa x, \tag{9.39}$$

där

$$\kappa = \sqrt{\frac{A}{k}} \tag{9.40}$$

Vi har nu randvillkoren $n(0) = n(L) = 0$, som ger oss

$$\left\{\begin{array}{lcl} B\cos\kappa 0 + C\sin\kappa 0 & = & 0 \\ B\cos\kappa L + C\sin\kappa L & = & 0 \end{array}\right. \tag{9.41}$$

Vi ser nu att för att randvillkoren skall vara uppfyllda så måste $B = 0$, och dessutom måste $\kappa L = \pi$. Det senare villkoret ger oss att sambandet

$$\sqrt{\frac{A}{k}}\frac{L}{\pi} = 1 \tag{9.42}$$

för att det skall finnas en lösning med de efterfrågade egenskaperna. För att neutrontäthetens största värde skall vara n_0, så måste också $C = n_0$. Slutligen får vi alltså att neutrontätheten beskrivs av funktionen

$$n(x) = n_0 \sin \kappa x. \tag{9.43}$$

Kapitel 10

Facit

1.1 Skalära fält

1. Plan med normalen
$$\frac{1}{13}(4,3,-12).$$

2. Cylinderytor med en axel utefter linjen $x=-2, y=0$.

3. Kon med spetsen i $(1,0,0)$ öppningsvinkel 90° och axeln utefter linjen $x=1, z=0$, öppningen mot positiva y.

4. $\phi = C \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 - z^2 = C+1$
   $C=-1$: Kon, axel $x=1, y=0$
   $C>-1$: Enmantlad hyperboloid, halvaxlar $\sqrt{C+1}$
   $C<-1$: Tvåmantlad hyperboloid apex i $z=\pm\sqrt{-C-1}$

5. $\phi = x^2 - y^2 = C$: hyperboliska cylindrar som fås genom att hyperblerna translateras i z-led.

6. $\phi = C$

$$C < \frac{1}{4}: \text{ ellipsoid med halvaxlar } \frac{a}{\sqrt{1-C}}, \frac{a}{\sqrt{1-4C}}, a$$

$$C = \frac{1}{4}: \text{ elliptisk cylinder } || \ y\text{-axeln}$$

$$\frac{1}{4} < C < 1: \text{ enmantlad hyperboloid, axel längs } y\text{-axeln, elliptiskt tvärsnitt}$$

$$C = 1: \text{ hyperbolisk cylinder } || \ x\text{-axeln}$$

$$C > 1: \text{ tvåmantlad hyperboloid, axel längs } z\text{-axeln, elliptiskt tvärsnitt.}$$

1.2 Vektorfält

1.

$$\begin{cases} x(\tau) &= x_0 e^{\tau} \\ y(\tau) &= y_0 + a\tau \\ z(\tau) &= z_0 \end{cases}$$

2. $r = 4\sin^2\theta, \ \varphi = \pi/6$

3. Fältlinje: $\rho = \sin\alpha + 2; \ z = -\cos\alpha + 2$

   Punkter: $(2, 0, 1), \ (-2, 0, 3)$

1.3 Potentialer och gradienter

1.

$$\hat{\mathbf{n}} = \pm\frac{1}{\sqrt{21}}(4, 1-2)$$

2.

$$\frac{20\sqrt{6}}{3}a$$

3.

$$\frac{a}{\sqrt{2}}$$

4.

$$\phi = C$$

$$a^2 - C > 0$$

   enmantlad hyperboloid med axeln genom $(-a, 0, 0)$ och parallell med z-axeln.

$$a^2 - C < 0$$

   tvåmantlad hyperboloid med spetsar i $(-a, 0, \pm\sqrt{C - a^2})$ och axeln parallell med z-axeln.

$$\text{Riktningsderivatan: } -2a\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

   Fältlinjer:

$$\begin{cases} x &= (x_0 + a)\, e^t - a \\ y &= y_0 e^t \\ z &= z_0 e^{-t} \end{cases}$$

5. **a**. Ellipser med centrum i origo och halvaxlar $a\sqrt{(k/c - 1)}$ och $a\sqrt{2(k/c-1)}$.

   b. Stigningen är 650 och höjden är 750 m.

6. **a**. Flugan skall flyga i riktningen $\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)$.

   b. Temperaturen ökar med 0.2 °C s^{-1}

7.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{21}}(4, -1, -2)$$

$$\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{21}}\right)$$

8.

$$\frac{3\,10^{-6}}{\sqrt{5}}$$

2.2 Kurvintegraler

1. -4

2. -2

3. $-27\pi/8$

4. 0

5. $-2\pi a B_0 \hat{\mathbf{z}} - 2aB_0\hat{\mathbf{y}}$

6. $2\pi a B_0$

7.

$$-\gamma\, 10^{-2}\left(\frac{9\pi}{2} - 8\right)\,\mathrm{J}$$

2.3 Ytintegraler

1. $4\pi a^4/5$

2. $4\pi A$

2.4 Gauss sats

1. 0

2. $2\pi a^2 b$

3. $\pm\frac{7\pi}{8}$

4. $64\pi\hat{\mathbf{z}}$

5. $-4\pi\hat{\mathbf{z}}/3$

6. $\frac{\pi}{2}$

7. $\frac{\pi}{6}$

8.

$$\frac{64}{3}\pi a^3\left(\rho g + 8ka\right)\hat{\mathbf{z}}$$

9. $\pi(b^2 - a^2)$

2.5 Stokes sats

1. $\pm\sqrt{10}\pi\left(2\sqrt{3}-1, 3\sqrt{3}, \sqrt{3}-2\right)$
2. $$\pm\frac{\pi a}{\sqrt{2}}(\pi-1)F_0$$
3. πa^3
4. $\pm 6\pi a^3$
5. $3\pi B_0 a\hat{\mathbf{x}}/4$
6. $\pm 16\pi a\hat{\mathbf{z}}$
7. $4a^3\hat{\mathbf{z}}$

3. Räkneregler för fältoperatorer

1. $3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{r})\mathbf{r} - 3r^2\mathbf{A}$
2. $\phi(\mathbf{r}) = C \Rightarrow \mathbf{A}\cdot\mathbf{r} = C - 4\mathbf{A}^2 \Rightarrow$ plan med $\mathbf{A}$ som normal.
3. $2\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$
4. $f(x) = Cx$
5. 0

4.1 Hur man konstruerar ett kroklinjigt koordinatsystem

1. $$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} = (v\cos\alpha, v\sin\alpha, u)$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v} = (u\cos\alpha, u\sin\alpha, -v)$$
$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha} = uv\,(-\sin\alpha, \cos\alpha, 0)$$
2. $$h_1 = h_2 = a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}$$
$$h_3 = 1$$
3. $$\lambda = -2$$
$$\mathrm{d}s^2 = 5\mathrm{d}u^2 + 5\mathrm{d}v^2 + 4w^2\mathrm{d}w^2$$
$$\mathbf{r} = \sqrt{5}u\hat{\mathbf{u}} + \sqrt{5}V\hat{\mathbf{v}} + 4w^2\hat{\mathbf{w}}$$
4. Nej

4.2 Differentialoperatorer i kroklinjiga koordinater

1.

$$\nabla\phi = \frac{\phi_0 \sinh 2\xi}{a\sqrt{\cosh^2\xi - \sin^2\eta}}\hat{\xi}$$

2. **a**.

$$\lambda = -\frac{1}{4}$$

$$h_u = \left(4u^2 + v^2\right)^{1/2}, \; h_v = \frac{1}{2}\left(4u^2 + v^2\right)^{1/2}, \; h_z = 1$$

Systemet är ett vänstersystem.

b. $\hat{\mathbf{z}}$

3.

$$\beta = \pm\alpha$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + \alpha^2 e^{2w}\left(\mathrm{d}v^2 + \mathrm{d}w^2\right)$$

$$\nabla^2 f = 0$$

4.

$$\begin{cases} h_1 &= a\sqrt{u^2+v^2} \\ h_2 &= a\sqrt{u^2+v^2} \\ h_3 &= auv \end{cases}$$

u-yta:

$$z = -\frac{x^2+y^2}{2au^2} + \frac{u^2 a}{2}$$

Rotationsparaboloid med öppningen nedåt $z_{\max} = u^2 a/2$.

v-yta:

$$z = \frac{x^2+y^2}{2av^2} - \frac{v^2 a}{2}$$

Rotationsparaboloid med öppningen uppåt $z_{\min} = -v^2 a/2$.

φ-yta:

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Halvplan från z-axeln

5. Laplace-operatorn

$$\nabla^2 = \frac{1}{a^2\left(1 + 2e^u\cos v + e^{2u}\right)}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) + \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial w^2}$$

Som fysikaliskt problem kan man tänka sig fältet kring kanten av en plattkondensator.

6.

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{1} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, -y, 0) \\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{2} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(y, x, 0) \\ \hat{\mathbf{u}}_\mathbf{3} &= (0, 0, 1) \end{cases}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = 2\sqrt{u_1^2 + 4u_2^2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\frac{A_{u_1}}{\left(u_1^2+4u_2^2\right)^{1/4}} + \frac{\partial}{\partial u_1}\frac{A_{u_2}}{2\left(u_1^2+4u_2^2\right)^{1/4}} + \frac{\partial}{\partial u_3}\frac{A_{u_3}}{2\left(u_1^2+4u_2^2\right)^{1/4}}\right)$$

7. **a**) Basvektorer:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} &= a\left(\sinh u \cos v \hat{\mathbf{x}} + \cosh u \sin v \hat{\mathbf{y}}\right)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= a\left(-\cosh u \sin v \hat{\mathbf{x}} + \sinh u \cos v \hat{\mathbf{y}}\right)\\ \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} &= \hat{\mathbf{z}}\end{aligned}$$

Skalfaktorer:

$$\begin{aligned}h_u &= a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}\\ h_v &= a\sqrt{\cosh^2 u - \cos^2 v}\\ h_w &= 1\end{aligned}$$

b)

$$\Phi = \frac{2}{\ln 3 - \ln 2}\left(u - \ln 3\right)$$

8. $\alpha =$ konstant:

$$z^2 = -4c\alpha^2 y + 4c^2\alpha^4$$

Parabolisk cylinder mot negativt y med spetsen i $y = c\alpha^2$

$\beta =$ konstant:

$$z^2 = 4c\beta^2 y + 4c^2\beta^4$$

Parabolisk cylinder mot positivt y med spetsen i $-c\beta^2$

$\gamma =$ konstant: Plan parallellt med yz-planet.

$$\mathrm{d}s^2 = 4c^2\left(\alpha^2 + \beta^2\right)\left(\mathrm{d}\alpha^2 + \mathrm{d}\beta^2\right) + c^2\mathrm{d}\gamma^2$$

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{4c^2\left(\alpha^2+\beta^2\right)}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial\beta^2}\right) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial\gamma^2}$$

4.3 Cylindriska och sfäriska koordinater

1.

$$\nabla^2\phi = \frac{6\phi_0}{a^2}\left(\frac{6z^2}{a^2} - 1\right)\exp\left(-3\frac{z^2}{a^2}\right)$$

2.

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 2$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{z}}$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0$$

3. **a**) Temperaturökning $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

   b) Snabbast ökning i riktningen $\frac{1}{\sqrt{17}}(-4\hat{\mathbf{r}} - \hat{\theta})$ med beloppet $\frac{\sqrt{17}}{8}$

4. $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ och $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

5.

$$\phi\left(r\right) = -\frac{2}{r} + C$$

6.

$$\begin{cases} h_u & = & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}} \\ h_v & = & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{u+v}{u}} \\ h_w & = & \sqrt{uv} \end{cases}$$

$$\nabla = \frac{2}{\sqrt{u+v}}\left(\sqrt{u+v}\,\hat{\mathbf{u}}\frac{\partial}{\partial u} + \sqrt{v}\,\hat{\mathbf{v}}\frac{\partial}{\partial v}\right) + \frac{1}{\sqrt{uv}}\hat{\mathbf{w}}\frac{\partial}{\partial w}\mathbf{r} = \sqrt{u}\,\hat{\mathbf{u}} + \sqrt{v}\,\hat{\mathbf{v}}$$

7. $\pm 6\pi$

8. $-\pi a^3 \hat{\mathbf{z}}$

9. $10\pi a^2 A_0$

10. $-10\pi/3$

11. $-356\pi - 8\pi a$

12. $28\pi a^2 A_0/3$

13. $\pm 6\pi a$

14. $3\pi a^2$

15. $\pm 18\pi a^3$

16.

$$-\frac{\pi}{2} a F_0 \left(1 + \frac{800}{\sqrt{481}}\right)$$

17. 0

18. 0

19. $\pm 2\pi \hat{\mathbf{x}}$

20. $4\pi F_0 a^2$

21.

$$\pm 2\pi b \left(1 - \frac{4b}{a}\right)$$

22. $11\pi F_0 a \hat{\mathbf{z}}$

5.1 Värmeledningsekvationen

1.

$$T(z) = (T_{\mathrm{d}} - T_0)\frac{x}{d} + T_0$$

2.

$$T(r,\theta) = \frac{\rho_0}{6\lambda}\left(a^2 - r^2\right) + T_0 + \frac{T_0}{2}\frac{r}{a}\cos\theta$$

3.

$$T(r) = T_0 + \frac{W_0}{4\pi\alpha b^2} + \frac{W_0}{4\pi\lambda}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right)$$

6.1 Potentialteori

1.

$$\phi(r) = V\frac{ab}{b-a}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{b}\right) \quad \text{för } a \le r \le b \mathbf{J}(r) = \sigma V\frac{ab}{b-a}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{för } a \le r \le b$$

2.

$$E(r) = \begin{cases} 0 \\ -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} \end{cases} \quad \phi(r) = \begin{cases} -\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 a} & \text{för} \quad r < a \\ -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 a} & \text{för} \quad a < r < 2a \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{för} \quad r > 2a \end{cases}$$

3.

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}r & \text{för} \quad r < \frac{a}{2} \\ \frac{\rho_0}{24\epsilon_0}\frac{a^3}{r^2} & \text{för} \quad \frac{a}{2} < r < a \\ 0 & \text{för} \quad r > a \end{cases}$$

4.

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^3}r & \text{för} \quad r < a \\ \frac{8Q}{28\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{8a^3}\right) & \text{för} \quad a < r < 2a \\ 0 & \text{för} \quad r > 2a \end{cases}$$

5.

$$E(r) = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{a^2} & \text{för} \quad r < a \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r^2} & \text{för} \quad r > a \end{cases}$$

E-fältet är diskontinuerligt och ej deriverbart i origo eftersom det där har obestämd riktning och är $\neq 0$.

6.

$$\phi(r,\theta) = -\frac{\rho_0}{20a^2}\left(r^4 - a^4\right) + \phi_0\frac{r}{a}\cos\theta.$$

7.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \phi_0 + \frac{\rho_0 a}{28}\left(r - \frac{r^5}{a^4}\right)\sin\theta\cos\varphi$$

8.

$$\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a}{10\kappa\epsilon_0}\left(\frac{2+3\kappa}{2+\kappa}r - \frac{r^3}{a^2}\right)\cos\theta & \text{för} \quad r < a \\ \frac{\rho_0 a^4}{5(2+\kappa)\epsilon_0}r^{-2}\cos\theta & \text{för} \quad r > a \end{cases}$$

9.

$$Q = \rho\frac{4\pi a^3}{3}\left(1 + \frac{a^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2}\right)$$

10.

$$\phi(r) = \phi_0 + \frac{1}{10}\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a\left(a - \frac{r^3}{a^2}\right)\sin\theta\cos\varphi$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{10}\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}\left[-3\frac{r^2}{a^2}\sin\theta\cos\varphi\hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{a}{r} - \frac{r^2}{a^2}\right)\left(\cos\theta\cos\varphi\hat{\theta} - \sin\varphi\hat{\varphi}\right)\right]$$

11.

$$\mathbf{A} = \left(3 - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\cos\theta\right)\frac{1}{r\sin\theta}\hat{\varphi}$$

12.

$$\phi\left(r, \theta, \varphi\right) = \frac{\rho_0 r}{4\epsilon_0}\left(a - r\right)\cos\theta$$

$$\sigma = -\frac{1}{4}\rho_0 a\cos\theta$$

13. **a**.

$$A_z\left(\rho\right) = -\frac{I\mu_0}{2\pi}\ln\rho + C$$

14.

$$\mathbf{g} = \begin{cases} -\frac{\gamma\rho_0 r}{3}\hat{\mathbf{r}} & \text{för} \quad 0 < r < R \\ -\frac{\gamma\rho_0 R^3}{3r^2}\hat{\mathbf{r}} & \text{för} \quad r > R \end{cases}$$

15.

$$\phi = \frac{\phi_2 - \phi_1}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\ln\frac{\rho}{R_1} + \phi_1$$

$$\mathbf{E} = \frac{\phi_1 - \phi_2}{\ln\left(R_2/R_1\right)}\frac{\hat{\rho}}{\rho}$$

2000-10-21

1. $r_{\max} = 4R$
2. $$2\pi F_0\left(1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$
3. (a) $b = -1$

   (b)

   $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right)\left(A + B\right)$$
4. (a)

   $$E\left(r\right) = \begin{cases} \frac{r\rho_0}{3\epsilon_0} & r < a \\ \frac{a^3\rho_0}{3\epsilon_0 r^2} & a < r < 4a \\ 0 & r > 4a \end{cases}$$

   (b)

   $$W = \frac{19}{90}\pi\frac{\rho_0}{\epsilon_0}a^5$$
5. (a)

   $$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{J} + Rn = k\nabla^2 n + Rn$$

   (b)

   $$n\left(x\right) = A\cos\kappa x,$$

   där $\kappa = \sqrt{R/k}$ och det måste gälla att

   $$\sqrt{\frac{R}{\kappa}}L = \frac{\pi}{2}$$

2001-01-12

1. Tangentplanets ekvation $4x + 3y + 5z = 20$. Avståndet mellan planen $1/\sqrt{2}$
2. $2\pi(F_0 + 6F_1)$
3.
$$h_u = h_v = (u^2 + v^2)^{1/2},$$
$$h_\varphi = uv,$$
$$\nabla\phi = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{u^2+v^2}}(u\hat{\mathbf{u}} + v\hat{\mathbf{v}}) + \frac{u^2+v^2}{uv}\cos\varphi\hat{\phi}$$
4.
$$T_\mathrm{c} = T_\mathrm{s} + \frac{\sigma T_\mathrm{s}^4}{\lambda}\delta$$
5. (a) $W = \pi R^2 F_0 / a$
   (b) Till exempel banan $\mathbf{r} = \tau(\hat{\varphi} + b\hat{\rho})$ där $0 < b < 1/2$ och τ är en parameter för banan. Det finns också andra lösningar.

2001-04-10

1.
$$\varphi = -\frac{\omega}{u}(r - R)$$
2.
$$h_u = h_v = a\sqrt{u^2+v^2}$$
$$h_\varphi = auv$$
$$\nabla^2\left(u^2+v^2\right) = \frac{8}{a^2\left(u^2+v^2\right)}$$
3. $2\pi K a^3/3$
4.
$$T(\rho,\theta) = -\frac{T_1 - T_0}{\ln(R+d) - \ln R}\ln\rho + \frac{T_0(R+d) - T_1\ln R}{\ln(R+d) - \ln R} + T_1 A d\frac{2R+d}{R+d}\left(\rho - \frac{R^2}{\rho}\right)\cos\theta$$

2001-08-20

1. Sätt $C = \Phi/\Phi_0$. Tre fall:
   $0 \le C < 1$: Ellipsoid med halvaxlarna:
$$\sqrt{\frac{C}{1-C}}a,\ \sqrt{\frac{C}{1-C}}a,\ \sqrt{C}a.$$
   $C = 1$: Planen $z = \pm\sqrt{C}a$.
   $C > 1$: Tvåmantlad hyperboloid längs z-axeln med halvaxlar
$$\sqrt{\frac{C}{C-1}}a,\ \sqrt{\frac{C}{C-1}}a,\ \sqrt{C}a$$

2.

$$\text{Kraften: } \frac{\pi R^2 I B_0}{a}\hat{\mathbf{x}}$$

$$\text{Flödet: } \frac{\pi R^2 B_0 x_0}{a}$$

3. Ytan är skalet $r = 3/\sqrt{10}$ och flödet är

$$4\pi \frac{3}{\sqrt{10}} \frac{141}{25}$$

4. Sätt tyngdaccelerationen vid jordytan till g_0.

$$g(r) = \begin{cases} \frac{27}{20} g_0 \frac{r}{R} & \text{för} \quad 0 < r < \frac{R}{3} \\ \frac{g_0}{20} \frac{R^2}{r^2} & \text{för} \quad \frac{R}{3} < r < \frac{2R}{3} \\ g_0 \left(\frac{27}{20} \frac{r}{R} - \frac{7}{20} \frac{R^2}{r^2} \right) & \text{för} \quad \frac{2R}{3} < r < R \end{cases}$$

5. **a**

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -u_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho}{\tau}$$

b

$$\rho(L) = \rho_0 \mathrm{e}^{-\frac{L}{u_0 \tau}}$$

2001-10-27

1.

$$p_0 \pi H^2 \left(3\mathrm{e}^{-4.5} - \mathrm{e}^{-4.5} \right) \hat{\mathbf{z}}$$

2.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} (z + a)$$

3.

$$\Phi(r, \theta) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[\frac{a}{r} - \frac{1}{2} - \frac{r^2}{2a^2} + \left(\frac{3}{16} \frac{r}{a} - \frac{3}{16} \frac{r^2}{a^2} \right) \cos\theta \right]$$

4. $a E_0 \sin e$

5. **a**

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = -L$$

b

$$L_{\max} = \frac{u_0 A}{L}$$

2002-01-17

1. Fältlinjerna är cirklar med centrum i origo.

2. **a**

$$T(r) = \frac{W_0}{6\lambda}\left(R^2 - r^2\right)$$

b

$$T(0) = \frac{W_0 R^2}{6\lambda}$$

3.

$$2\pi a^2 F_0 \left(17 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

4.

$$\frac{2}{3}\pi F_0 a$$

5. **a**

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma n - g + \nabla \cdot (D \nabla g)$$

b

$$n = \frac{g_0}{R^2}\left(\frac{R^2 - \rho^2}{\gamma} + 4\frac{D}{R^2}\right)$$

2002-08-19

1.

$$y^2 = x^2 - a^2$$

2.

$$4\pi F_0 a^2 \left(\frac{2}{\sqrt{5}} + 1\right)$$

3.

$$B_\varphi = \begin{cases} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{r}{R^2} I_0 & r < R \\ \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{1}{r} I_0 & R < r < 1.5R \\ 0 & r > 1.5R \end{cases}$$

4.

$$\frac{64}{3}\pi F_0 a$$

5. **a**

$$\frac{\partial n}{\partial t} = k\nabla^2 n + An$$

b

$$n(x) = n_0 \sin\left(\sqrt{\frac{A}{k}} x\right),$$

där

$$\sqrt{\frac{A}{k}} L = \pi$$

2002-10-26

1. Vorticiteten har sitt maximum i $\rho = 0$.
2. $$\frac{80\pi}{3} F_0 a$$
3. $$T(\rho, \varphi) = T_0 \left[\frac{\ln \frac{\rho R_2}{R_1^2}}{\ln \frac{R_2^2}{R_1^2}} + \frac{1}{2} \frac{R_2 \rho}{R_2^2 - R_1^2} \left(1 - \frac{R_1^2}{\rho^2}\right) \cos\varphi \right]$$
4. $$4\pi F_0 a^2 \hat{\mathbf{z}}$$
5. **a**
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}$$
b
$$f(t) = \frac{C}{\sqrt{t}},$$
där C är en godtycklig konstant.

2003-01-16

1. Tangentplanets ekvation:
$$2x + y + 4z = 10$$
Punktens avstånd från tangentplanet:
$$\frac{8}{\sqrt{21}}$$
2. $$11\pi F_0 a^2$$
3. $$T(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 R^2}{12\lambda} & r < \frac{R}{2} \\ \frac{\rho_0}{6\lambda} \left(\frac{5}{4} R^2 - \frac{1}{4} \frac{R^3}{r} - r^2 \right) & r > \frac{R}{2} \end{cases}$$
4. $$-2\pi F_0 a$$
5. **a**
$$\frac{\partial n}{\partial t} = \lambda_1 \nabla^2 n - \lambda_2 \nabla^2 g$$
b
$$n(\rho) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$